

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Facoltà di Ingegneria

Tesi di laurea in  
Ingegneria Informatica

SBSP: Stokes BSP.

Una struttura dati per il calcolo del cobordo  
e di forme differenziali

Candidato:  
Franco Milicchio  
Matricola 60664/30

Relatore:	Correlatore:
Prof. Alberto Paoluzzi	Prof. Antonio Di Carlo
Dip. di Informatica ed Automazione	Dip. di Strutture

Anno accademico 2001–2002

## Ai miei genitori

*But Knowledge to their eyes her ample page,  
Rich with the spoils of time, did ne'er unroll;  
Chill Penury repress'd their noble rage,  
And froze the genial current of the soul.  
Full many a gem of purest ray serene,  
The dark unfathom'd caves of ocean bear;  
Full many a flower is born to blush unseen,  
And waste its sweetness on the desert air.*

Thomas Gray — “Elegy written in a Country Churchyard”

# Indice

<b>1</b>	<b>Geometria poliedrale</b>	<b>7</b>
1.1	Definizioni preliminari . . . . .	7
1.2	Insiemi convessi . . . . .	8
1.3	Insiemi poliedrali . . . . .	9
1.3.1	Politopi . . . . .	11
1.4	Complessi . . . . .	12
1.4.1	Complessi simpliciali . . . . .	13
1.4.2	Complessi poliedrali . . . . .	14
1.4.3	Complessi a celle . . . . .	15
1.5	BSP: Binary Space Partition . . . . .	17
1.5.1	Definizione di Albero BSP . . . . .	18
1.5.2	Algoritmo di partizionamento . . . . .	19
1.5.3	Vantaggi e svantaggi degli alberi BSP . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Algebra di Grassmann</b>	<b>25</b>
2.1	Cenni di algebra lineare . . . . .	25
2.1.1	Applicazioni lineari . . . . .	27
2.1.2	Spazio duale . . . . .	28
2.2	Forme multilineari . . . . .	32
2.2.1	Forme di ordine superiore . . . . .	32
2.2.2	Il prodotto esterno . . . . .	33
2.3	Multivettori . . . . .	34
2.3.1	Dal vettore al multivettore . . . . .	34
2.3.2	Forme e multivettori . . . . .	37
2.4	Applicazioni alla fisica . . . . .	41
2.4.1	Forze e multivettori . . . . .	41
2.4.2	Momenti e multivettori . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Rappresentazioni differenziali</b>	<b>43</b>
3.1	Richiami di analisi . . . . .	43
3.1.1	Campi . . . . .	43

3.1.2	Forme differenziali . . . . .	44
3.2	Forme differenziali e k-vettori . . . . .	46
3.2.1	Relazione con le forme differenziali . . . . .	46
3.3	Star pseudo-complex: Starplex . . . . .	48
3.3.1	Le k-cocatene . . . . .	48
3.3.2	Lo starplex . . . . .	51
3.3.3	Derivazione esterna . . . . .	52
3.3.4	Interpretazione geometrica . . . . .	53
3.4	Multivettori e leggi fisiche . . . . .	57
3.4.1	La legge di bilancio . . . . .	57
3.4.2	Il teorema di Stokes . . . . .	58
3.4.3	Il duale del teorema di Stokes . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Rappresentazione SBSP: Stokes BSP</b>	<b>63</b>
4.1	Motivazioni . . . . .	63
4.2	Cocatene ed alberi BSP . . . . .	65
4.2.1	Invarianza del cobordo . . . . .	65
4.3	Stokes BSP: SBSP . . . . .	74
4.4	Cobordo ed SBSP . . . . .	76
4.5	Teorema di Stokes ed SBSP . . . . .	78
4.6	SBSP ed ottimizzazioni . . . . .	80
4.7	Valutazioni finali . . . . .	81
	<b>Riferimenti</b>	<b>97</b>

# Prefazione

Fin dalla sua nascita il calcolatore ha suscitato speranze di semplificare la vita, in particolare nei laboriosi e ripetitivi calcoli. Con questo obiettivo, si sono sviluppati strumenti sempre più efficaci, a partire dal primo elaboratore, la *macchina calcolatrice* di B. Pascal, ai moderni programmi di elaborazione numerica.

Nel 1700 nacque la moderna analisi numerica e vettoriale, così come la si conosce dai corsi di analisi e geometria. Nell'ottocento avvenne una grande rivoluzione: Hermann Günter Grassmann pubblicò il suo lavoro del 1844 intitolato “*Die Lineale Ausdehnungslehre*” (cf. [Gra44]), tradotto come “*Teoria dell'estensione*”. Il concetto che si ha di vettore è quello di un segmento orientato, proprio come viene tutt'oggi utilizzato. Grassmann estese tale concetto dotandolo di una dimensione, non dunque può solo segmenti, ma celle bidimensionali, tridimensionali e così via. Fu un'idea rivoluzionaria, ma l'opera e le successive sull'argomento rimasero sconosciute, non a caso qualunque studente non conosce i vettori in forma diversa da quella già esposta.

L'algebra si è evoluta senza tener conto dei lavori di Grassmann, così come la fisica. Tutti i concetti di fisica che si conoscono infatti sono dipendenti da una analisi vettoriale in cui i vettori sono lineari. L'ingegneria moderna è stata costruita ignorando completamente i concetti dell'algebra multivettoriale.

Solo negli ultimi anni, si è riscoperta la ricchezza dimenticata dell'algebra di Grassmann, e sono sorte una fioritura di opere ed applicazioni. Tale algebra infatti è non solo una estensione di quella da tutti conosciuta, ma riesce a modellare i concetti fisici meglio dell'algebra lineare. Questa riscoperta è stata profetizzata da Grassmann stesso, nell'introduzione di “*Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form*” (cf. [Gra62]):

Poiché ho la netta sensazione che gli sforzi che ho applicato alla scienza qui esposta, la quale ha occupato una considerevole parte della mia vita ed ha necessitato un intenso esercizio, non sarà perduto. [...] verrà un giorno quando sarà tirato fuori dalla polvere dell'oblio e le idee qui riportate daranno frutto. [...] un

giorno queste idee, anche se in forma diversa, riappariranno e con il passar del tempo parteciperanno ad un vivo scambio intellettuale. Poiché la verità è eterna, è divina; e nessuna fase nello sviluppo della verità, per quanto piccolo possa essere il dominio che abbraccia, può passare senza lasciar traccia alcuna. Essa rimane anche se gli indumenti con cui la vestono gli uomini deboli cadono nella polvere.

Sono nati moltissimi progetti di analisi FEM (Finite Element Method) per aiutare l'analisi di problemi complessi, ma ancora quasi nessuno utilizza i concetti sviluppati da Grassmann. Comincia comunque a prender piede l'idea che una tale algebra possa essere d'aiuto. In [Bro01] viene spiegato l'uso del package "*GrassmannAlgebra*" nel programma di analisi matematica simbolica e numerica *Mathematica*.

Grazie alla commistione dell'algebra di Grassmann, topologia algebrica ed analisi matematica, si è dimostrato una analogia tra multivettori e forme differenziali (cf. [Tu82], [Sha00]), fondamentale passo nella formulazione delle teorie fisiche in questa "nuova" algebra. Molto interessante è il lavoro del Prof. Enzo Tonti sulla formalizzazione dell'elettromagnetismo (cf. [Ton00]) e sulla struttura formale delle teorie fisiche (cf. [Ton75]).

Tali lavori possono essere l'incipit di un nuovo approccio dello studio della fisica, anche se si è ancora lontani dalla completa formalizzazione delle leggi fisiche secondo l'algebra di Grassmann e dall'introduzione di questa in tool di calcolo.

In questo ambito si muove questa tesi. Nel primo capitolo verrà esposta una breve trattazione dei concetti principali della geometria poliedrale, focalizzando l'attenzione sugli alberi BSP, che saranno poi ripresi. Nel secondo capitolo si darà una veloce visione dell'algebra di Grassmann, partendo dai concetti ben noti di algebra lineare. Il terzo capitolo è dedicato ad una esposizione di concetti di analisi matematica e topologia algebrica, ponendo grande attenzione ad una struttura dati esposta in [Sha00]. Il quarto è dedicato all'esposizione della struttura dati che da il nome alla tesi, riprendendo gli alberi BSP ed esponendo la loro versatilità nella memorizzazione di catene. L'ultimo capitolo è dedicato ad una brevissima serie di esempi sugli argomenti esposti in questa tesi.

Un ringraziamento è doveroso verso il Professor A. Di Carlo: grazie alle sue lezioni e consigli è stato possibile approfondire una iniziale intuizione ed ha portato alla realizzazione di questa tesi di laurea.

# Capitolo 1

## Geometria poliedrale

Questo capitolo intende esporre i concetti principali della geometria poliedrale, introducendo i concetti della teoria dei convessi, e passando poi alle definizioni di poliedro e politopo. In ultima analisi, verrà esposta la struttura dati BSP (Binary Space Partition), utile alla definizione di spazi. Per una trattazione esaustiva, cf. [Pao02], [Bro83].

### 1.1 Definizioni preliminari

Prima di ogni altra definizione è utile richiamare alcuni concetti di topologia, come la definizione stessa di topologia e di spazio, iperpiani e sottospazi indotti da un iperpiano.

**Definizione 1 (Topologia).** *Si definisce **Topologia** su un insieme  $W$  un insieme  $T$  di sottoinsiemi di  $W$  tali che:*

- $\forall a, b \in T : a \cup b \in T$
- $\forall a, b \in T : a \cap b \in T$
- $\emptyset \in T$
- $W \in T$

La coppia  $(W, T)$  è detta **spazio topologico**. Se non esistono ambiguità è possibile chiamare topologia  $W$ . Una **topologia metrica** su  $W$  è l'insieme delle sfere centrate nei punti di  $W$ . La **topologia naturale** è la topologia metrica indotta dalla distanza euclidea.

**Definizione 2.** *Si definisce **spazio euclideo**  $E^n$ ,  $\mathbb{R}^n$  dotato di metrica euclidea.*

**Definizione 3 (Intorno).**  $S \subset W$  si definisce **intorno** di  $x \in W$  se e solo se esiste un insieme  $V$  nella topologia di  $W$  tale che  $x \in W$  e  $V \subset S$ .

**Definizione 4 (Bordo).**  $x \in W$  è un **punto di bordo** di  $S$  se nè  $S$ , nè  $W \setminus S$  è un intorno di  $x$ . L'insieme dei punti di bordo di  $S$  è denotato  $\partial S$ .

**Definizione 5 (Interno).**  $x \in W$  è un **punto interno** di  $S$  se  $S$ , è un intorno di  $x$ . L'insieme dei punti interni di  $S$  è denotato  $\text{int}S$ .

## 1.2 Insiemi convessi

Vengono di seguito esposti alcuni concetti fondamentali riguardanti gli insiemi convessi, nozioni fondamentali per la definizione successiva di poliedro e politopo, nonché per definire la struttura dati BSP.

**Definizione 6 (Iperpiano).** Si definisce **iperpiano** in  $E^n$  l'insieme

$$H_{u,\alpha} = \{x \in E^n : u^T x = \alpha\} \quad (1.1)$$

con  $u \in E^n \setminus \{\emptyset\}$  detto **vettore normale** a  $H_{u,\alpha}$ .

Risulta dunque che un iperpiano è un oggetto geometrico di codimensione 1, cioè un oggetto immerso in uno spazio  $E^n$  di dimensione  $n - 1$ . In uno spazio di dimensione 2 un iperpiano è una retta, in uno spazio di dimensione 3 è un piano euclideo e così via.

Un iperpiano divide lo spazio  $E^n$  in due sottospazi chiusi, denominati rispettivamente **sottospazio below** (o “sotto”) e **sottospazio above** (o “sopra”):

$$H_{u,\alpha}^- = \{x \in E^n : u^T x \leq \alpha\} \quad (1.2)$$

$$H_{u,\alpha}^+ = \{x \in E^n : u^T x \geq \alpha\} \quad (1.3)$$

**Definizione 7 (Combinazione convessa).** Una **combinazione convessa** di punti  $\{x_i\}$  è una combinazione lineare, affine e positiva:

$$\sum_i \alpha_i x_i \quad (1.4)$$

con  $\sum_i \alpha_i = 1$ ,  $\forall i : \alpha_i \geq 0$ .

**Definizione 8 (Convesso).** Si definisce **cella convessa** l'insieme di tutte le combinazioni convesse degli elementi di un insieme  $S$ :

$$\text{conv}S$$

Questo è anche l'insieme minimale contenente  $S$ . Un insieme  $S$  è detto **convesso** se

$$S = \text{conv}S$$

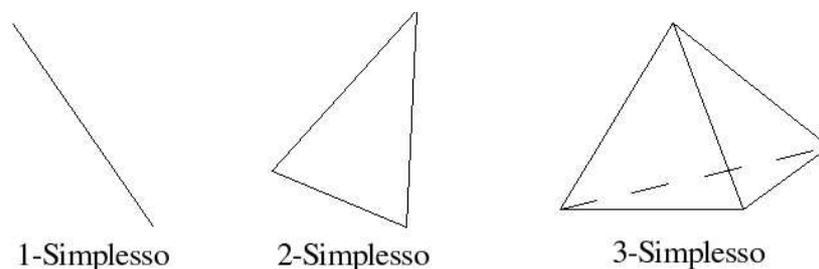


Figura 1.1: Esempi di semplici

Avendo dato la definizione di combinazione convessa, dunque di cella convessa, possiamo ora definire un oggetto fondamentale della geometria poliedrale, su cui si basano alcune strutture dati di definizione di oggetti geometrici:

**Definizione 9 (Simplesso).** *Sia  $A = \{x_0, \dots, x_d\}$  con  $x_i \in E^d \ \forall i$  un insieme di  $d + 1$  punti affinemente indipendenti, allora  $\text{conv}A$  è detto **d-simplesso**.*

Un d-simplesso è dunque la generalizzazione del concetto di **triangolo** d-dimensionale. Uno 0-simplesso è dunque un punto, un 1-simplesso un segmento, un 2-simplesso un triangolo, un 3-simplesso un tetraedro e così via.

### 1.3 Insiemi poliedrali

In questa sezione si definiranno gli oggetti fondamentali della geometria poliedrale, quali appunto i poliedri, i politopi, ed altre definizioni importanti, quali faccia, adiacenza ed altre.

**Definizione 10 (Iperpiano di supporto).** *Sia  $A \subseteq E^n$  insieme di punti, sia  $H \subseteq E^n$  un iperpiano. Si dice che  $H$  **supporta**  $A$  **in**  $x$  se  $x \in A \cap H$  e  $A \subset H^+$  oppure  $A \subset H^-$ .*

*Se  $H$  supporta  $A$  in un punto di bordo allora si dice che  $H$  è detto **iperpiano di supporto**.*

**Definizione 11 (Poliedro).** *Si definisce **poliedro** l'intersezione di un numero finito di sottospazi chiusi:*

$$P(A, b) = \{x \in E^n : Ax \leq b, \quad A \in \mathbb{R}_n^m, \quad b \in \mathbb{R}^m\} \quad (1.5)$$

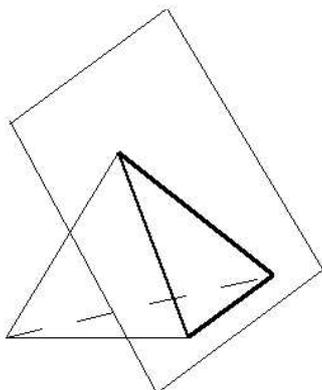


Figura 1.2: Esempio di un iperpiano di supporto

Da questa definizione si deduce che un poliedro è un insieme convesso, non necessariamente limitato. Inoltre ne deriva che un sottospazio indotto da un iperpiano è a sua volta un poliedro. Comunemente si indica la dimensione del poliedro antepoendolo al termine stesso, ovvero se  $\dim P = p$ , allora  $P$  si chiamerà  $p$ -poliedro.

Definiamo ora alcuni concetti della geometria poliedrale connessi alla definizione di poliedro, concetti noti come quello di faccia di un poliedro.

**Definizione 12 (Diseguaglianza valida).** Una diseguaglianza  $ax \leq \beta$  è detta **valida** se e solo se  $P \subseteq H_{a,\beta}^+$ .

**Definizione 13 (Iperpiano di supporto).** L'iperpiano  $H_{a,\beta}^+ \subset E^n$  si dice **di supporto** a  $P$ , con  $P$  un poliedro, se  $ax \geq \beta$  o  $ax \leq \beta$  sono validi e  $H_{a,\beta} \cap P \neq \emptyset$

**Definizione 14 (Faccia).** Sia  $P \subset E^n$  un poliedro ed  $H$  un iperpiano di supporto, allora

$$F = P \cap H \tag{1.6}$$

è chiamato **faccia** di  $P$ .

È comune indicare con nomi differenti le facce di un poliedro a seconda della dimensione del sottospazio  $F$ : se  $\dim F = 0$  allora la faccia è detta **vertice**, se  $\dim F = 1$  è detta **spigolo**, viene chiamata **faccetta** una faccia con  $\dim F = n - 1$ . Si possono indicare le dimensioni delle facce postponendo alle stesse il nome "faccia": 1-faccia (spigoli), 0-faccia (vertici), 2-faccia...



Figura 1.3: Esempi di facce di un semplice

### 1.3.1 Politopi

Il concetto comune di poliedro è quello di un oggetto limitato, quali sono ad esempio il triangolo, il cubo, un ipercubo. Secondo una definizione rigorosa questi ricadono in un insieme più limitato, sottoinsieme dei poliedri come sopra definiti.

**Definizione 15 (Politopo).** *Sia  $P$  un poliedro.  $P$  è detto **politopo** se*

$$\forall x, y \in P \quad \exists \eta \in \mathbb{R} : |x - y| \leq \eta$$

*Un politopo è dunque un poliedro limitato.*

Elenchiamo ora alcune proprietà riguardanti i politopi:

1. Ogni politopo è l'intersezione di un numero finito di sottospazi
2. Ogni intersezione limitata di sottospazi è un politopo
3. L'intersezione l'unione e la proiezione di politopi è un politopo
4. Ogni faccia di un politopo è un politopo
5. Ogni faccia di un politopo è contenuta in una faccetta dello stesso

In particolare, si può definire **politopo simpliciale** un poliedro limitato  $P \subset E^n$  se tutte le  $(n-1)$ -facce sono semplici. Un politopo  $P$  è definito **politopo semplice** se generato dalla intersezione del numero minimo  $n$  di faccette.

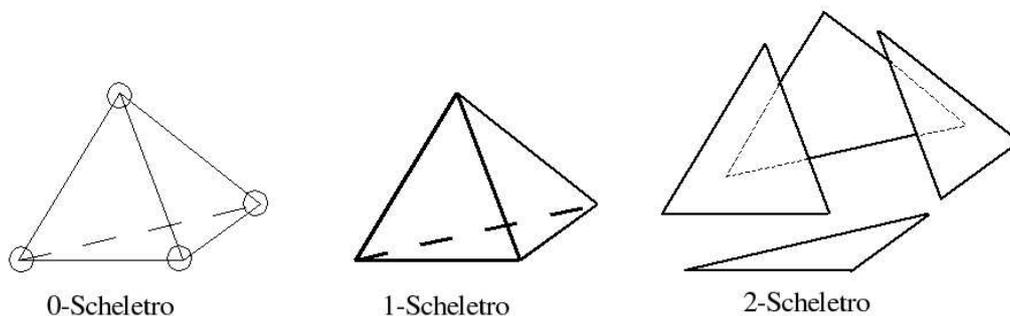


Figura 1.4: Esempio di scheletro di un politopo

Alcuni esempi di politopi: l'**ottaedro** è un politopo simpliciale — infatti ogni sua  $(n-1)$ -faccia è un 1-simplesso — mentre il **cubo** è un politopo semplice — le sue faccette infatti sono dei quadrati, non dei semplici.

**Definizione 16 (Faccia indotta).** Sia  $P = P(A, b) \subset E^n$  un politopo. Un insieme  $F$  è detto **faccia** di  $P$  se esiste una disequaglianza valida  $a^T x \leq \beta$  tale che

$$F = \{x \in P : a^T x = \beta\} \quad (1.7)$$

$F$  è così detta **faccia indotta** da  $a^T x \leq \beta$ .

Si ha che con questa definizione,  $F = \emptyset$  ed  $F = P$  sono facce di  $P$  in quanto la definizione è soddisfatta dalle equazioni

$$0x = -1 \quad 0x = 0$$

**Definizione 17 (Scheletro).** Si definisce **s-scheletro** la collezione delle  $k$ -facce di un  $p$ -politopo  $P$ , per  $k = 0, 1, \dots, s \leq p$ , denotato come  $K_s(P)$ . Per semplicità si può indicare con  $F(P)$  l' $s$ -scheletro di un  $s$ -poliedro.

Diamo ora una definizione di adiacenza tra semplici, che può essere rapidamente estesa a poliedri e politopi:

**Definizione 18 (Adiacenza).** Due semplici  $\sigma, \tau$  si dicono **s-adiacenti** se hanno una  $s$ -faccia in comune.

## 1.4 Complessi

Le definizioni di politopi e poliedri introducono dunque oggetti convessi di dimensione qualunque. Ci si rende conto però che tali concetti sono inadatti a descrivere insiemi non convessi, a tale scopo si introducono definizioni “derivate”, quali appunto i complessi.

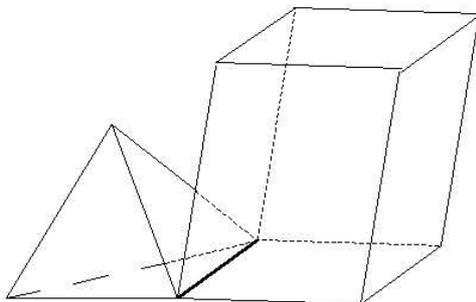


Figura 1.5: Esempio di adiacenza tra due politopi

### 1.4.1 Complessi simpliciali

Una prima definizione è derivata dai semplici, gli oggetti convessi più semplici. Mettendo “assieme” più semplici è possibile creare oggetti di complessità maggiore — anche non convessi — come è facile intuire pensando di unire due triangoli.

La definizione rigorosa di ciò che è possibile intuire è quella di complesso simpliciale, riportata di seguito:

**Definizione 19 (Complesso simpliciale).** *Un insieme  $\Sigma$  di semplici è detto **complesso simpliciale** se:*

- se  $\sigma \in \Sigma$  allora ogni faccia di  $\sigma$  è in  $\Sigma$
- $\forall \sigma, \tau \in \Sigma$  è  $\sigma \cap \tau = \emptyset$  oppure  $\sigma \cap \tau$  è faccia sia di  $\sigma$  sia di  $\tau$

Ad un complesso simpliciale viene assegnato l'ordine  $d$  pari al massimo ordine dei semplici ad esso appartenenti, verrà dunque denominato un  $d$ -complesso simpliciale. Si parlerà di  $d$ -complesso simpliciale **regolare** se ogni semplice ha dimensione pari a  $d$ .

Con un abuso di terminologia è possibile definire lo **scheletro** di un complesso:

**Definizione 20.** *Si definisce **s-scheletro** di un complesso simpliciale  $\Sigma$  l'insieme  $K_s = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} K_s(\sigma)$  delle  $s$ -facce dei semplici appartenenti a  $\Sigma$ .*

**Definizione 21 (Supporto).** *Si definisce **carrier geometrico** o **supporto** di un complesso simpliciale  $\Sigma$*

$$[\Sigma] = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma \quad (1.8)$$

Il carrier geometrico di un complesso simpliciale è dunque l'insieme dei punti appartenenti al complesso stesso.

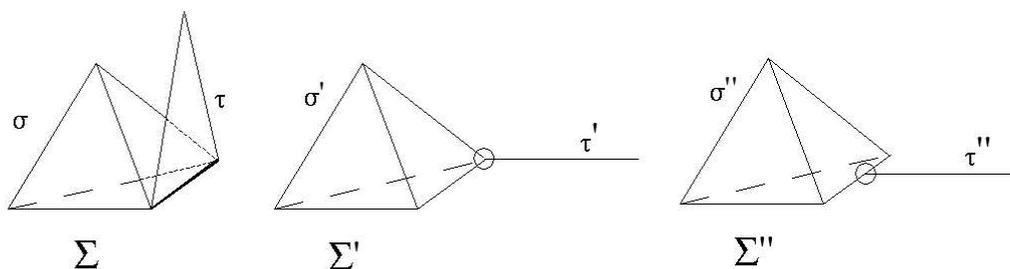


Figura 1.6: Esempio di complessi simpliciali. I primi due lo sono, l'ultimo non è un complesso simpliciale

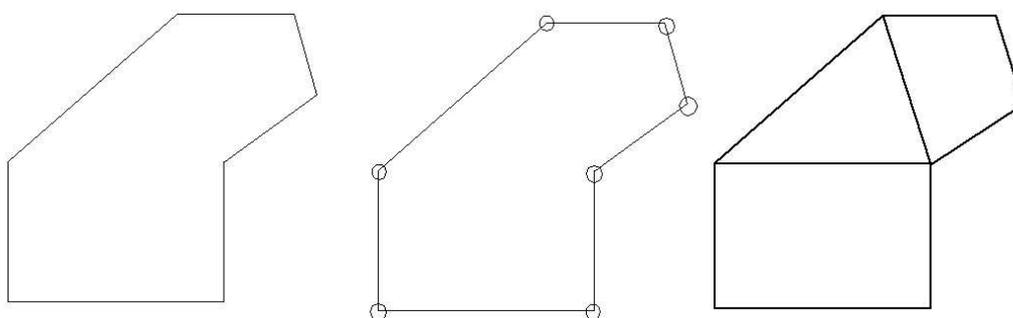


Figura 1.7: Esempio di un complesso poliedrale con lo 0-scheletro e l'1-scheletro

### 1.4.2 Complessi poliedrali

La definizione sopra riportata utilizza la nozione di semplice, ma è facile immaginare come la definizione possa essere generalizzata. Un semplice è il più semplice poliedro (politopo) e, dunque, si può generalizzare il concetto di complesso simpliciale mediante l'uso di poliedri.

**Definizione 22 (Complesso poliedrale).** *Sia  $C$  un insieme finito di poliedri. Allora  $C$  dicesi **complesso poliedrale** se*

- se  $P \in C$  allora  $F(P) \subseteq C$
- se  $P, Q \in C$  allora  $P \cap Q \in F(P)$  e  $P \cap Q \in F(Q)$

Se un complesso poliedrale è costituito da soli politopi, allora il complesso è chiamato **complesso politopale**.

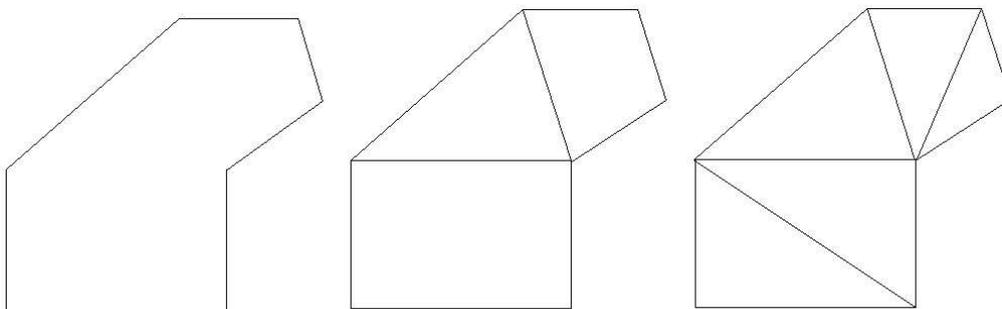


Figura 1.8: Esempio di una suddivisione politopale e simpliciale

Ad ogni complesso poliedrale è associata la **dimensione del complesso**, che, in modo analogo ai complessi simpliciali, è la massima dimensione dei politopi appartenenti al complesso. Si può definire il **carrier** di un complesso poliedrale e politopale, analogamente a quanto riportato per i complessi simpliciali.

Come è intuibile, alcune categorie di insiemi finiti di  $E^n$  sono esprimibili tramite complessi politopali. Più nel particolare, ogni politopo è ottenibile dall'unione di semplici, ossia da un complesso simpliciale. In modo rigoroso dunque si possono definire i seguenti concetti.

**Definizione 23 (Suddivisione politopica).** Sia  $C = \{C_i\}$  un complesso politopico e sia  $P \subset E^n$ , allora  $C$  è detto **suddivisione politopica** di  $P$  se

- $\bigcup_i C_i = P$
- $\forall C_i \in C : C_i$  politopo

**Definizione 24 (Triangolazione).** Sia  $C = \{C_i\}$  una suddivisione politopica di  $P \subset E^n$ , se  $C$  è un complesso simpliciale, allora è detto **triangolazione** di  $P$ .

### 1.4.3 Complessi a celle

E' stato definito in precedenza il concetto di "cella convessa". Tale definizione può essere utilizzata per generalizzare il concetto di complesso.

**Definizione 25 (Sfera).** Dicesi **sfera** o  **$n$ -sfera** unitaria un insieme  $S$ :

$$S = \{x \in E^n : \|x\| = 1\} \quad (1.9)$$

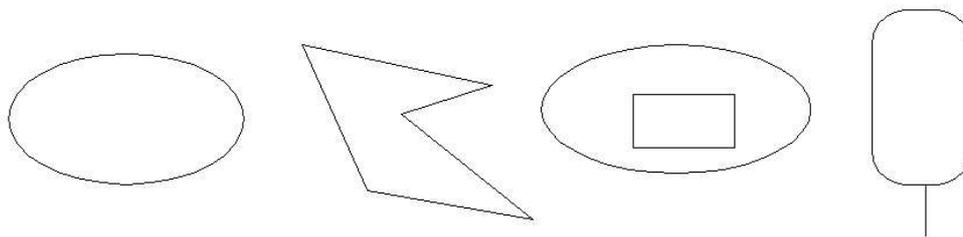


Figura 1.9: Esempi di celle: le prime 2 lo sono, le altre no

**Definizione 26 (Palla).** Analogamente alla sfera, si definisce **sfera piena** o **palla** l'insieme

$$S = \{x \in E^n : \|x\| \leq 1\} \quad (1.10)$$

**Definizione 27 (Cella).** Un insieme  $C$  è detto **cella** o  $n$ -cella se omeomorfo ad una  $n$ -sfera.

Una cella è dunque un insieme “simile” ad una sfera: un insieme è una cella se esiste una deformazione in grado di portare la cella sotto forma di sfera.

**Definizione 28 (Complesso a celle).** Un complesso a celle  $\Gamma$  in  $E^n$  è un insieme finito di celle tali che

- La collezione degli interni di tutte le celle in  $\Gamma$  forma una partizione del carrier di  $\Gamma$
- Per ogni cella  $\gamma \in \Gamma$  il bordo di  $\gamma$  è l'unione degli interni di un sottoinsieme di celle di  $\Gamma$

La prima condizione implica che l'interno del complesso a celle risulta partizionato negli interni delle celle da cui è composto. La seconda condizione implica che nel complesso l'intersezione di due celle appartiene al bordo delle celle stesse, e può essere formato da più celle. In altre parole, il bordo di una cella può essere unione di due celle, come si può notare in figura 1.10.

Grazie a questa definizione, possiamo formulare la seguente proprietà:

**Proprietà 1.** Un insieme di celle  $\Gamma$  in  $E^n$  è un complesso a celle se, e solo se, per ogni  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ ,  $\gamma \neq \gamma'$ :

- L'interno di  $\gamma$  e di  $\gamma'$  sono disgiunti
- L'intersezione dei bordi di  $\gamma$  e di  $\gamma'$  è l'unione degli interni di un sottoinsieme di celle di  $\Gamma$

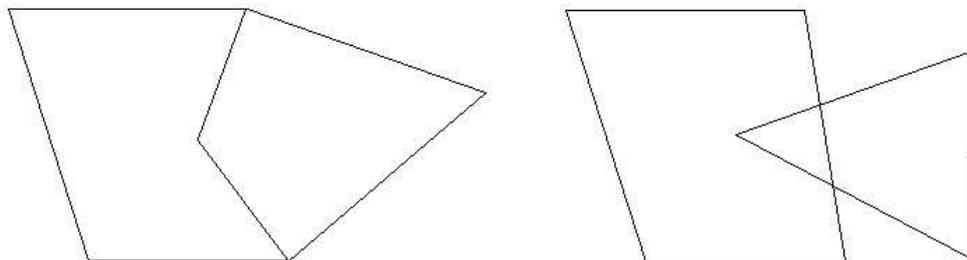


Figura 1.10: Esempi di complesso a celle: il primo lo è, il secondo no

## 1.5 BSP: Binary Space Partition

In uno spazio euclideo è possibile “immergere” degli oggetti complessi quanto si vuole. Per poter effettuare operazioni e calcoli su questi oggetti, è necessario utilizzare delle strutture dati efficienti che rendano gli algoritmi di calcolo delle operazioni accettabili dal punto di vista della complessità computazionale. Questa esigenza ha portato alla fioritura di una varietà di rappresentazioni dello spazio, raggruppate da *Requicha* in sei “rappresentazioni pure”, accettate universalmente (cf. [Req77], [Req80]).

**Schemi enumerativi** Un modello è descritto enumerando le celle “piene” secondo una partizione dello spazio. A questa classe appartiene ad esempio l'*octree*

**Schemi decompositivi** L'oggetto è descritto mediante un insieme di celle, solitamente di topologia nota; diversamente dagli schemi enumerativi, la partizione è indotta dall'oggetto stesso. A questa categoria appartiene l'*albero BSP*

**Istanziamento di primitive** è un approccio procedurale, ogni rappresentazione è una tupla contenente il nome della primitiva (funzione o procedura) da richiamare ed i parametri da fornire

**Rappresentazioni Sweep** Gli oggetti sono rappresentati da una superficie ed una curva di profilo che genera il solido; è in uso in applicazioni meccaniche e civili per la semplicità di rappresentazioni di curve e superfici parametriche

**Rappresentazioni di bordo** Un oggetto è rappresentato dal suo bordo, solitamente assieme ad una descrizione delle adiacenze

**Schemi CSG** Acronimo di **Constructive Solid Geometry**, la rappresentazione più usuale è mediante un albero binario in cui le foglie rappresentano solidi primitivi o sottospazi, mentre i nodi rappresentano operazioni tra insiemi o trasformazioni affini

**Schemi compositi** Rappresenta un oggetto mediante una rappresentazione “ibrida”, usando più schemi descritti sopra

### 1.5.1 Definizione di Albero BSP

Come già accennato, la rappresentazione dello spazio mediante alberi BSP appartiene alla categoria degli schemi decompositivi. L'albero BSP è una struttura dati che suddivide lo spazio euclideo in una partizione, in cui ciascun insieme può essere messo in relazione con gli altri secondo una **relazione d'ordine**.

Passiamo alla definizione di **Albero BSP**. Sia dato un insieme di iperpiani in  $E^n$ , un albero BSP definito su di essi stabilisce una partizione gerarchica dello spazio.

Un nodo  $\nu$  dell'albero rappresenta una regione convessa — non necessariamente limitata — di  $E^n$  che chiameremo  $R_\nu$ . Il nodo  $\nu$  ha due figli, denominati  $below(\nu)$  ed  $above(\nu)$ . Le foglie dell'albero rappresentano una regione non ulteriormente partizionata, chiamate *Full* (oppure *In*) ed *Empty* (oppure *Out*). Ogni nodo  $\nu$  dell'albero ha associato un iperpiano  $h_\nu$ , intersecante  $R_\nu$ , il quale partiziona  $R_\nu$  in tre sottoinsiemi:

1.  $R_\nu^0 = R_\nu \cap h_\nu$  di dimensione  $n - 1$
2.  $R_\nu^- = R_\nu \cap h_\nu^-$  — il sottospazio  $h_\nu^-$  è associato a  $(\nu, below(\nu))$  mentre  $R_\nu^-$  è associato al sottoalbero  $below(\nu)$
3.  $R_\nu^+ = R_\nu \cap h_\nu^+$  — il sottospazio  $h_\nu^+$  è associato a  $(\nu, above(\nu))$  mentre  $R_\nu^+$  è associato al sottoalbero  $above(\nu)$

Per ogni nodo  $\nu$  la regione  $R_\nu$  è l'intersezione dei sottospazi  $h_e$  incontrati nel percorso dalla radice dell'albero al nodo  $\nu$ :

$$R_\nu = \bigcap_{e \in E(\nu)} h_e \quad (1.11)$$

dove  $E(\nu)$  è il percorso (edge) dalla radice.

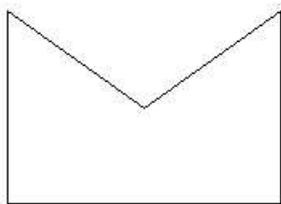


Figura 1.11: Esempio di albero BSP — Poligono in esame

### 1.5.2 Algoritmo di partizionamento

Di seguito si mostra l'algoritmo di partizionamento dello spazio per la creazione di un albero BSP di una scena in  $E^n$ . Sia dunque una scena in cui sono definiti dei poliedri  $P_i$ .

1. Si sceglie un iperpiano  $h_r$  di supporto ad un poliedro  $P_i$
2. Definiamo  $R_r^0 = h_r \cap P_i$  la radice dell'albero — è garantito  $R_r^0 \neq \emptyset$  poichè gli iperpiani sono iperpiani di supporto
3. Si creano i sottoalberi  $above(r)$ , associato a  $h_r^+$ , e  $below(r)$ , associato al sottospazio  $h_r^-$ . In tali sottospazi si sceglie un altro iperpiano di supporto reiterando il punto 3
4. Se non vi sono più iperpiani disponibili, il nodo è una foglia dell'albero, marcata come **Full** se la cella che rappresenta è contenuta in un poliedro, **Empty** altrimenti

Nel caso in cui un iperpiano intersechi un poliedro, quest'ultimo viene “tagliato” in due ottenendo due poliedri, uno nel ramo  $above(\nu)$  e l'altro nel ramo  $below(\nu)$ .

Segue ora un esempio di creazione di un albero BSP in un ambiente bidimensionale: scegliamo come esempio l'oggetto bidimensionale non convesso in figura 1.11.

Il primo passo dell'algoritmo prevede la scelta di un iperpiano di supporto; scegliamo l'iperpiano 1 per costruire la radice dell'albero, vengono determinati i sottospazi  $h_1^+$  ed  $h_1^-$ , i sottospazi  $above$  e  $below$ , ed  $R_1^0$  è l'intersezione dell'iperpiano con il poliedro. Il sottospazio  $below$  non è ulteriormente partizionabile, quindi il figlio del nodo radice appartenente al sottoalbero  $below(1)$

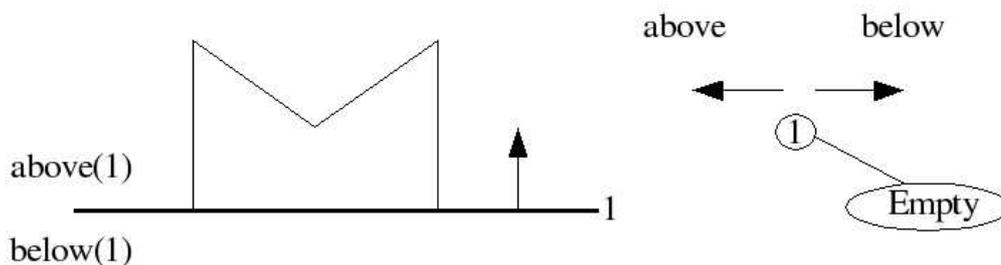


Figura 1.12: Esempio di albero BSP — Passo 1

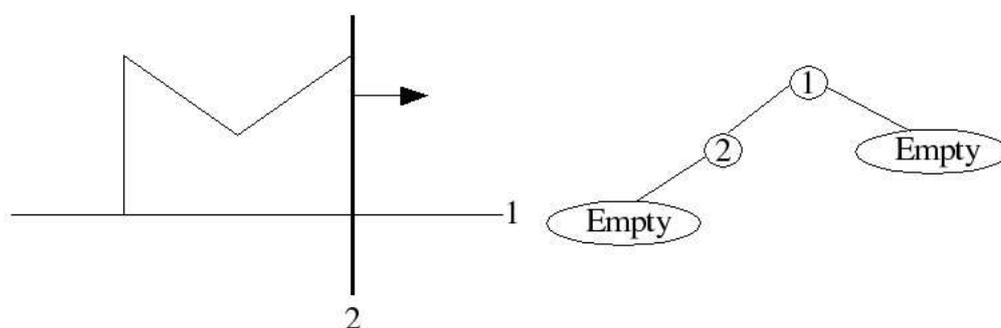


Figura 1.13: Esempio di albero BSP — Passo 2

è una foglia denominata **Empty**, dal momento che ha intersezione vuota con il poliedro (Figura 1.12).

Al secondo passo, scegliamo l'iperpiano 2. Come si evince dalla figura 1.13 il sottospazio *above* è “vuoto”, sarà quindi il figlio *above* ad essere una foglia, anch'essa denominata **Empty**, come la precedente.

Al terzo passo, scegliendo l'iperpiano 3, ci si trova nella situazione in cui un iperpiano “tagli” un poliedro, in questo caso il poliedro stesso. In questo caso, il poliedro viene “tagliato” in due, e si continua la computazione come nei passi precedenti (Figura 1.14).

I passi successivi continuano finchè vi sono iperpiani di supporto non ancora presi in considerazione. Alla fine del processo, l'albero BSP sarà completato con tutte le foglie denominate *Full* oppure *Empty*. Segue poi un esempio di taglio di un poliedro in un ambiente di dimensione maggiore di 2.

L'algoritmo sopra descritto funziona a prescindere dalla dimensione dello spazio in considerazione, a patto però che i poliedri siano di dimensione

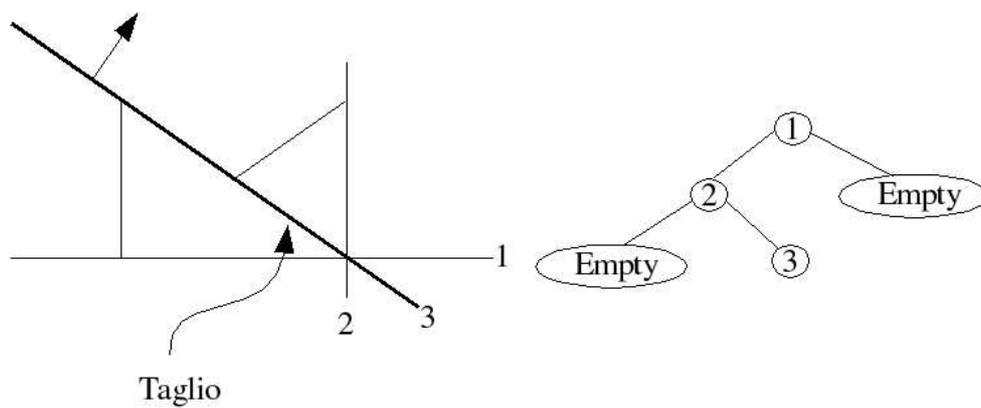


Figura 1.14: Esempio di albero BSP — Passo 3

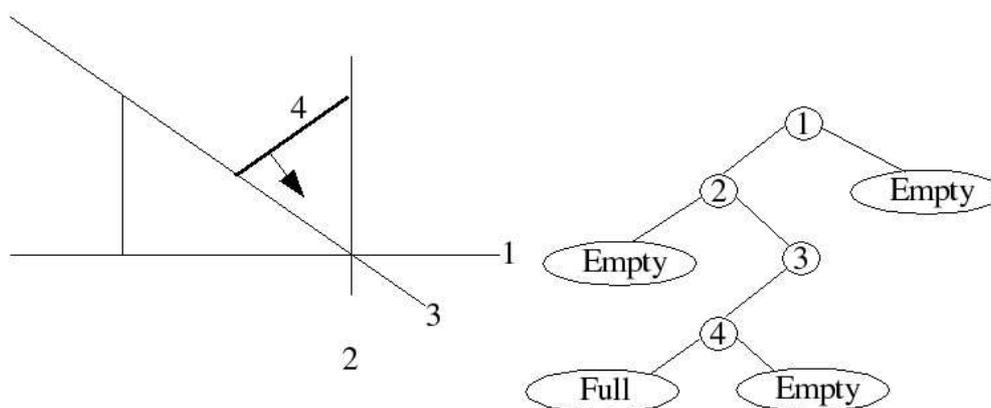


Figura 1.15: Esempio di albero BSP — Passo 4

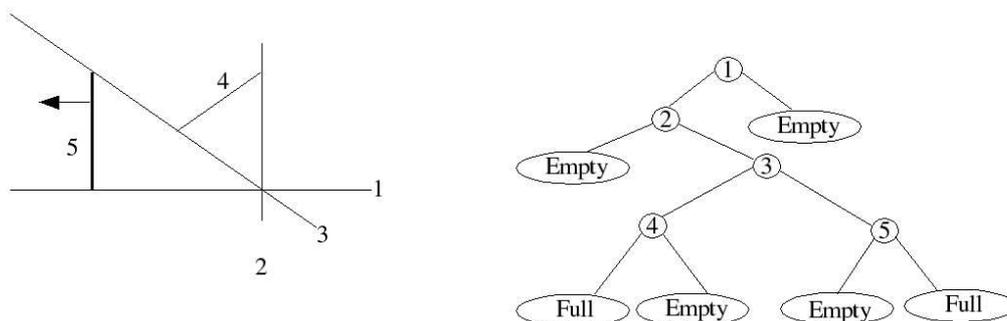


Figura 1.16: Esempio di albero BSP — Passo 5

massima.

L'albero BSP infatti non può descrivere oggetti di dimensione non massima; una modifica alla struttura dati permette di esaminare anche oggetti di dimensione inferiore, considerando invece di un albero binario, un albero con tre figli, tenendo dunque presente non solo le due disequazioni indotte dagli iperpiani, ma anche l'equazione dell'iperpiano stesso. Ciò consente di descrivere in  $E^n$  oggetti di dimensione  $n$  ed  $n - 1$ : un esempio è una scena in  $E^3$  in cui si immergano oggetti di dimensione 2, ovvero dei poligoni.

Per oggetti di dimensione ancora inferiore, si può ricorrere ad una descrizione in uno spazio di dimensione pari alla dimensione dell'oggetto in considerazione, "immergendo" poi l'oggetto ottenuto nello spazio di dimensione maggiore — questo è ad esempio il caso di un poligono piano in un ambiente di dimensioni maggiori di 2.

### 1.5.3 Vantaggi e svantaggi degli alberi BSP

La rappresentazione mediante alberi BSP è stata particolarmente in voga negli anni novanta grazie alla sua flessibilità e semplicità, nonché per la sua compattezza. Un albero binario non occupa molto spazio di memoria se confrontato ad altre strutture dati, si pensi infatti ad una rappresentazione alata di una decomposizione simpliciale di una scena, in cui devono essere memorizzate le adiacenze tra i semplici.

Un vantaggio dell'uso di alberi BSP sta nella loro utilità nella rimozione delle parti nascoste di una scena — questa sua duttilità ha permesso la creazione di un videogioco, *Doom*, in cui l'osservatore si muoveva in scene dinamiche abbastanza complesse (attori non statici, textures, shading, ...), su com-

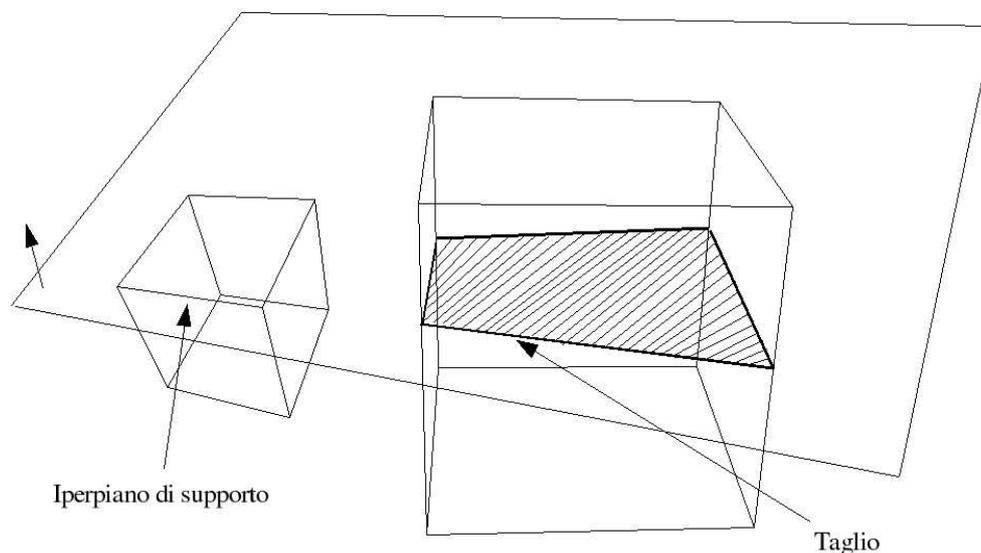


Figura 1.17: Taglio di poliedri nella costruzione di un albero BSP

puter modesti. Ogni videogioco, da questo capostipite, ha conseguentemente usato questa tecnica.

Non solo questi sono i vantaggi dell'uso di alberi BSP. Il problema dell'appartenenza di un punto ad una cella è facilmente risolvibile in tempo logaritmico rispetto al numero di iperpiani di cui la scena è composta, ovvero rispetto al numero di nodi dell'albero. Partendo dalla radice dell'albero è possibile stabilire in quale sottospazio il punto appartiene sostituendo le coordinate all'interno della disequazione del sottospazio; si segue dunque il ramo corrispondente (*above* oppure *below*), ripetendo questa operazione fino a raggiungere una foglia. Se la foglia è una foglia **Full** allora il punto è interno ad una cella.

La struttura dati BSP consente inoltre di effettuare operazioni booleane su poliedri e complessi, consentendo inoltre la fusione di alberi BSP in modo piuttosto agevole, descritta da Naylor, Amanatides e Thibault (cf. [Thi90]).

Naturalmente, la risoluzione in tempo logaritmico di problemi grazie alla struttura dati BSP è realizzabile se l'albero binario risulta bilanciato. Tale situazione si può ottenere se nella costruzione si utilizza un criterio "intelligente" nella scelta degli iperpiani di supporto, tentando di creare un albero il più bilanciato possibile. Nel peggiore dei casi comunque, il tempo di elaborazione risulta lineare rispetto al numero di nodi, ovvero rispetto al numero di iperpiani.

Svantaggio dell'uso degli alberi BSP è la perdita delle informazioni riguardanti la topologia, smarrendo la conoscenza delle celle originarie e delle adiacenze.

# Capitolo 2

## Algebra di Grassmann

Questo capitolo è dedicato ad un breve excursus sui concetti principali dell'algebra di Grassmann (matematico del 1800), algebra che risulta particolarmente valida e che “estende” i concetti di *vettore* e di *matrice* formalizzandoli in un modo più ricco di quanto non venga fatto nei corsi di algebra lineare.

Questo capitolo non intende dare una formalizzazione dell'algebra dei multivettori, ed alcuni concetti saranno espressi in modo informale, poiché non è obiettivo di questa tesi darne una visione esauriente. Per maggiori informazioni riguardo questa affascinante branca dall'algebra, si consiglia la visione di [Hes96], [Jan96], [Cli78].

La più importante fonte di informazioni sull'algebra di Grassmann è la collezione degli scritti di Hermann Günter Grassmann (cf. [Gra78], [Gra44], [Gra62]). Tali scritti sono chiaramente in lingua tedesca, tradotti in inglese in [Kan95]. Altre fonti su tale argomento sono [Whi98], [For41], [Hyd06].

### 2.1 Cenni di algebra lineare

Prima di definire i concetti riguardante l'algebra di Grassmann, nota anche come *Algebra dei multivettori*, richiamiamo i concetti noti dell'algebra lineare (cf. [Rot97]).

**Definizione 29 (Spazio vettoriale).** *Siano  $(K, +, \cdot)$  un campo,  $1$  l'unità moltiplicativa e  $(V, +)$  un gruppo abeliano. Sia definita la applicazione*

$$\begin{aligned} \bullet & : K \times V \longrightarrow V \\ & (\alpha, v) \longrightarrow \alpha \bullet v \end{aligned}$$

detta *moltiplicazione per uno scalare* con le seguenti proprietà:

$$1. \forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall v \in V \quad : \quad (\alpha + \beta) \bullet v = \alpha \bullet v + \beta \bullet v$$

$$2. \forall \alpha \in K, \quad \forall v, w \in V \quad : \quad \alpha \bullet (v + w) = \alpha \bullet v + \alpha \bullet w$$

$$3. \forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall v \in V \quad : \quad \alpha \bullet (\beta \bullet v) = (\alpha \cdot \beta) \bullet v$$

$$4. \forall v \in V \quad : \quad 1 \cdot v = v$$

Allora  $V$  è detto **spazio vettoriale sul campo**  $K$ . Gli elementi di  $V$  sono detti **vettori** mentre gli elementi di  $K$  sono detti **scalari**. Per semplicità di scrittura, si denoterà  $\alpha v$  il prodotto  $\alpha \bullet v$ . Vengono denominati  $0_V$  l'elemento neutro di  $(V, +)$  e con  $0_K$  l'elemento neutro di  $(K, +)$ .

Definito lo spazio vettoriale, si possono enunciare le seguenti proprietà:

**Proprietà 2.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $K$ , allora si ha che:

$$1. \forall \alpha \in K \quad : \quad \alpha 0_V = 0_V$$

$$2. \forall v \in V \quad : \quad 0_K v = 0_V$$

$$3. \alpha v = 0_V \implies \alpha = 0_K \text{ oppure } v = 0_V$$

$$4. \forall \alpha \in K, \quad \forall v \in V \quad : \quad (-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$$

$$5. \forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall v \in V \quad : \quad (\alpha - \beta)v = \alpha v - \beta v$$

$$6. \forall \alpha \in K, \forall v, w \in V \quad : \quad \alpha(v - w) = \alpha v - \alpha w$$

Uno spazio vettoriale è solitamente in relazione ad un particolare spazio, detto spazio affine:

**Definizione 30 (Spazio affine).** Un insieme di punti  $\mathcal{A}$  è chiamato **spazio affine** modellato su uno spazio vettoriale  $\mathcal{V}$  se esiste una funzione

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (x, v) &\mapsto x + v \end{aligned}$$

chiamata **struttura affine**. Lo spazio vettoriale  $\mathcal{V}$  è detto **di supporto** allo spazio affine.

**Proprietà 3.** Una struttura affine gode delle seguenti proprietà:

$$1. (x + v) + w = x + (v + w) \quad \forall x \in \mathcal{A}, \quad \forall v, w \in \mathcal{V}$$

$$2. x + 0 = x \quad \forall x \in \mathcal{A} \text{ dove } 0 \in \mathcal{V} \text{ è il vettore nullo}$$

$$3. \forall x, y \in \mathcal{A} \quad \exists! (y - x) \in \mathcal{V} \quad \text{t.c.} \quad x + (y - x) = y$$

Uno spazio affine è quindi un insieme di punti in cui lo “spostamento” da un punto ad un altro è ottenuto tramite la somma di un vettore ed il punto di partenza. Una conseguenza di ciò è che **la differenza di punti è un vettore**. Uno spazio affine  $\mathcal{A}$  è di **dimensione**  $n$  se è modellato su uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ .

### 2.1.1 Applicazioni lineari

Si possono analizzare le definizioni delle applicazioni lineari, partendo dall'assunto che siano note le definizioni di **dipendenza lineare** di vettori, di **base** di uno spazio vettoriale, di **generatori**.

**Definizione 31 (Applicazione lineare).** *Siano  $V$  e  $V'$  due spazi vettoriali sullo stesso campo  $K$  e sia  $f$  una applicazione da  $V$  a  $V'$ . Allora  $f$  dicesi **applicazione lineare** fra  $V$  e  $V'$  se verifica le condizioni seguenti:*

1.  $\forall v, w \in V \quad : \quad f(v + w) = f(v) + f(w)$
2.  $\forall \alpha \in K, \quad \forall v \in V \quad : \quad f(\alpha v) = \alpha f(v)$

Si può osservare che la prima condizione implica che  $f$  sia un omomorfismo tra i gruppi abeliani  $(V, +)$  e  $(V', +)$ , mentre la seconda applicazione ha senso poichè entrambi gli spazi vettoriali sono definiti sullo stesso campo.

Definiamo ora due importanti insiemi correlati con le applicazioni lineari:

**Definizione 32 (Nucleo).** *Siano  $V$  e  $V'$  due spazi vettoriali sullo stesso campo  $K$  e sia  $f$  una applicazione da  $V$  a  $V'$ . Definiamo **nucleo** di  $f$  l'insieme*

$$\text{Ker } f = \{v \in V \quad : \quad f(v) = 0_{V'}\} \quad (2.1)$$

**Definizione 33 (Immagine).** *Siano  $V$  e  $V'$  due spazi vettoriali sullo stesso campo  $K$  e sia  $f$  una applicazione da  $V$  a  $V'$ . Definiamo **immagine** di  $f$  l'insieme*

$$\text{Im } f = \{v' \in V' \quad : \quad \exists v \in V \quad | \quad f(v) = v'\} \quad (2.2)$$

Di seguito si riportano alcune proprietà delle applicazioni lineari su spazi vettoriali.

**Proprietà 4.** *Siano  $V$  e  $V'$  due spazi vettoriali sul campo  $K$  e sia  $f$  una applicazione lineare tra  $V$  e  $V'$ . Siano inoltre i vettori  $v_1, \dots, v_n \in V$  linearmente dipendenti, allora sono linearmente dipendenti  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n) \in V'$ .*

Analogamente, risulta essere:

**Proprietà 5.** *Siano  $V$  e  $V'$  due spazi vettoriali sul campo  $K$  e sia  $f$  una applicazione lineare tra  $V$  e  $V'$ . Siano inoltre  $v_1, \dots, v_n \in V$  vettori linearmente indipendenti, allora sono linearmente indipendenti  $f(v_1), \dots, f(v_n) \in V'$ .*

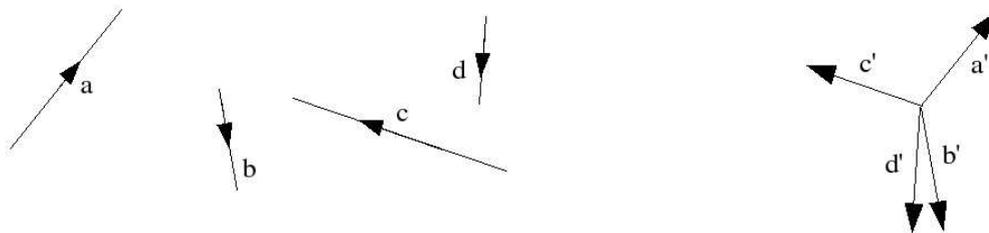


Figura 2.1: Esempi di segmenti orientati e rispettivi vettori (rappresentanti)

Fin dalle scuole superiori, la nozione di *vettore* è stata associata ad una interpretazione geometrica del concetto, derivata dalle esperienze fisiche sulle forze.

Nello spazio infatti possono essere definiti dei **segmenti orientati**. Su tali segmenti si può stabilire una **relazione di equivalenza** tra segmenti con la stessa direzione e, come è ben noto, una relazione di equivalenza induce una partizione in **classi d'equivalenza**. I vettori sono quindi i **rappresentanti** delle classi d'equivalenza. Ogni vettore è equivalente al rappresentante della propria classe con un coefficiente che ne fa variare la lunghezza ed il verso.

### 2.1.2 Spazio duale

Avendo definito lo spazio vettoriale e le applicazioni lineari, indaghiamo più a fondo su queste ultime. Possiamo definire quindi uno “spazio vettoriale delle applicazioni lineari”:

**Proprietà 6.** *Siano  $V$  e  $V'$  due spazi vettoriali su  $K$ . Allora l'insieme  $\text{Hom}(V, V')$  delle applicazioni lineari di  $V$  in  $V'$ , può essere dotato di struttura di spazio vettoriale su  $K$ , ponendo  $\forall f, g \in \text{Hom}(V, V')$ ,  $\forall \alpha \in K$  e  $\forall v \in V$  :  $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$  ed  $(\alpha f)(v) = \alpha f(v)$ .*

Poichè risulta essere un campo  $K$  spazio vettoriale su se stesso —  $\{a\}$  è infatti una base  $\forall a \in K$ ,  $a \neq 0$  — possiamo dare la seguente definizione:

**Definizione 34 (Spazio duale).** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $K$ . Si definisce **spazio vettoriale duale di  $V$**  (o più semplicemente **duale di  $V$** ), denotato  $V^*$ , lo spazio vettoriale  $\text{Hom}(V, K)$ . Gli elementi di  $V^*$  sono denominati **covettori** oppure **forme lineari**.*

Tale spazio vettoriale ha la stessa dimensione dello spazio vettoriale da cui dipende.

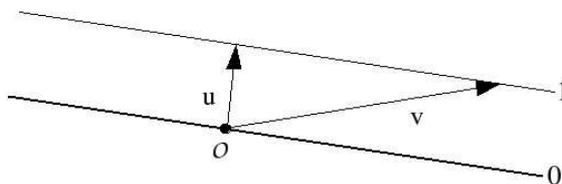


Figura 2.2: Esempio di vettori con la stessa “altezza”

Allo stesso modo in cui è stato possibile dare una interpretazione geometrica dei vettori, diamo ora una stessa interpretazione ai covettori. Per semplicità concettuale (e di scrittura) supponiamo che lo spazio duale sia costruito sul campo dei numeri reali  $\mathbb{R}$ . Sia quindi fissato un punto  $\mathcal{O}$  e su questo punto sia fissato un vettore  $u \in V$  che porti l'origine  $\mathcal{O}$  in  $x$ . Sia dunque definito un covettore  $\alpha \in V^*$ . Un covettore è un elemento dello spazio duale, quindi è una applicazione lineare, che associa ad un vettore uno scalare, in questo caso un numero reale. Una rappresentazione “geometrica” di un covettore è quindi simile ad una cartina altimetrica, in cui le curve di livello sono delle rette, e la retta di “valore” nullo passa per l'origine  $\mathcal{O}$ . Le altre rette restano definite essendo parallele alla retta passante per l'origine.

Dalla valutazione di un vettore grazie alla applicazione di un covettore si ottiene una “misura” della lunghezza del vettore, o meglio, della sua “altezza” rispetto al covettore. Tale concetto però non deve essere confuso con la nozione di *lunghezza euclidea*. Un covettore misura la lunghezza di un vettore in uno spazio **lineare**, ovvero in uno spazio in cui le “*isoipse*” sono degli oggetti di codimensione 1 (rette nello spazio bidimensionale, piani in quello tridimensionale, ...), mentre in uno spazio euclideo, la misura è data da **sfere** centrate in un punto (*origine*).

Nella figura 2.2 vengono messi in evidenza due vettori  $u$  e  $v$  con la stessa altezza rispetto ad un covettore: è evidente la differenza tra la *misura* e *misura euclidea*.

In generale, un covettore può essere interpretato come un **fascio di oggetti di codimensione 1**.

Come già detto, l'insieme delle forme lineari è uno spazio vettoriale lineare. La notazione di applicazione di un covettore è leggermente differente da quella di applicazione di una funzione:

$$\alpha(u) = \langle \alpha, u \rangle \quad (2.3)$$

In figura sono riportate le rappresentazioni geometriche del prodotto di un

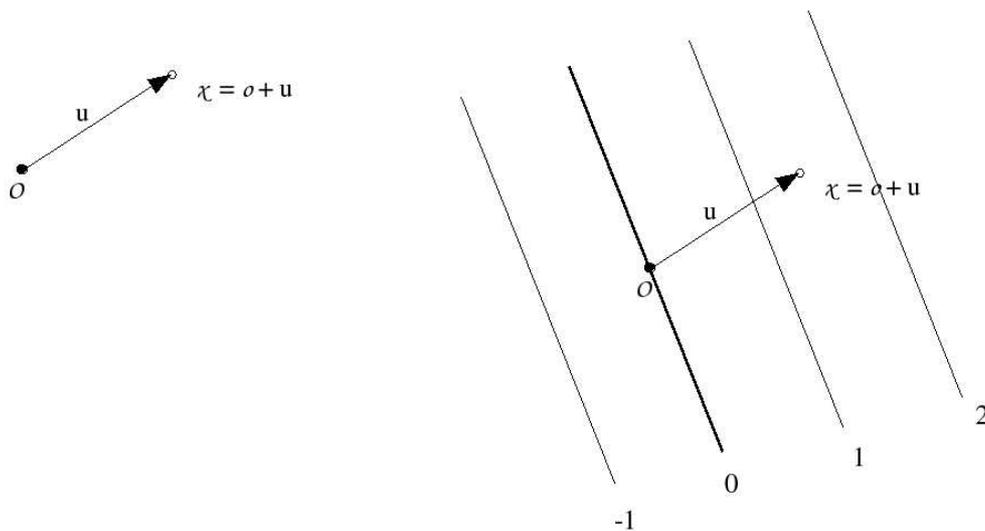


Figura 2.3: Esempio di un covettore nel piano

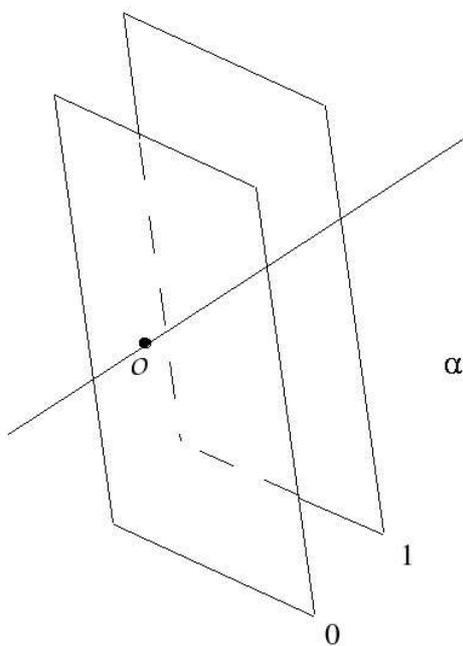


Figura 2.4: Esempio di un covettore nello spazio tridimensionale

covettore per uno scalare, in cui l'origine  $\mathcal{O}$  è punto fisso, e la somma di covettori. In questo ultimo caso, viene proposto l'esempio in cui i due covettori  $\alpha$  e  $\beta$  non siano "paralleli" ovvero sia  $\beta \neq \lambda\alpha$ . Se risulta essere  $\beta = \lambda\alpha$ , il calcolo ricade nel prodotto di covettore per uno scalare:

$$\langle \alpha + \beta, u \rangle = \langle \alpha + \lambda\alpha, u \rangle = \langle (1 + \lambda)\alpha, u \rangle \quad (2.4)$$

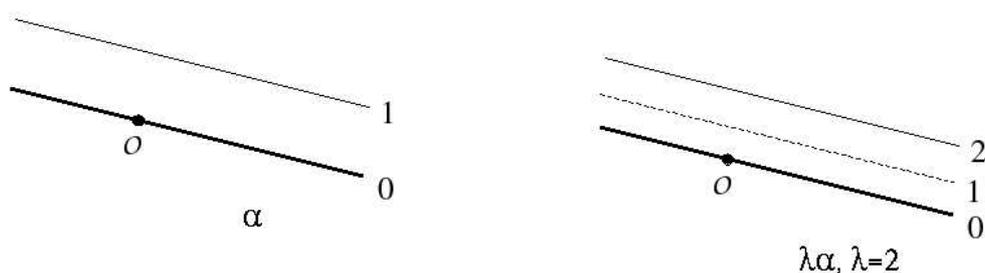


Figura 2.5: Esempio di un prodotto di uno scalare per un covettore

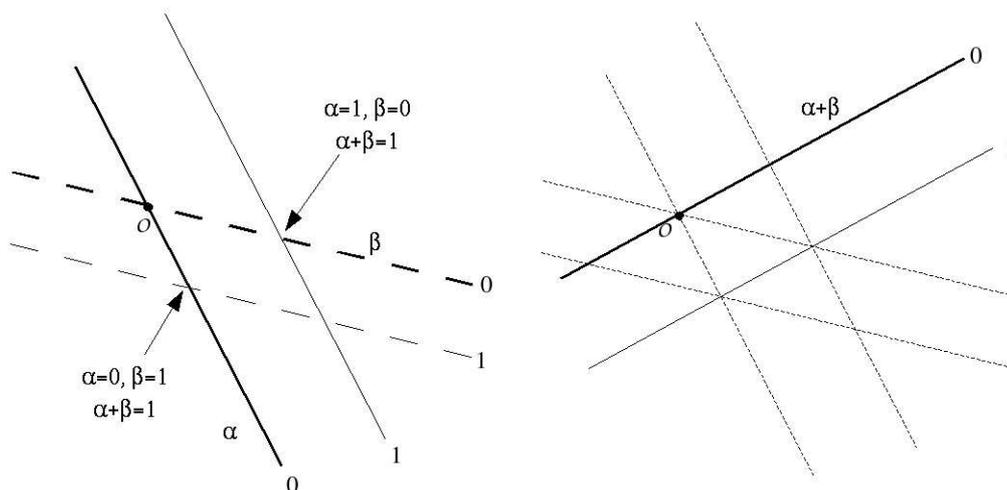


Figura 2.6: Esempio di addizione di covettori. Si intendano i numeri nella figura come il risultato dell'applicazione dei covettori

## 2.2 Forme multilineari

In tutti i settori della fisica e dell'ingegneria vengono utilizzati i concetti di vettore, quindi il calcolo vettoriale, ed il calcolo tensoriale. L'algebra di Grassmann estende questi concetti formalizzandoli in una algebra i cui risultati possono essere applicati alla fisica in modo più coerente di quanto si possa effettuare con il semplice calcolo vettoriale.

Si pensi infatti al semplice concetto di *forza*. Tale concetto viene sempre rappresentato da un vettore applicato in un punto, ma è evidente come tale concetto risulti inadeguato alla modellazione del concetto di forza. Per ovviare a tale deficienza viene infatti usato il concetto di *momento*. Le condizioni di equilibrio di un corpo rigido comprendono anche una condizione sulla somma dei momenti delle forze in ogni punto. L'uso dell'algebra di Grassmann permette di rappresentare una forza correttamente, e le condizioni di equilibrio dei vettori forza e dei momenti dei vettori sono conseguenze naturali di operazioni algebriche. Verrà in seguito fatto un breve esempio sulla applicazione alla meccanica di tale algebra.

Il contributo principale di Grassmann è quello di aver formulato un linguaggio naturale della geometria, dal quale è stato possibile derivare un calcolo geometrico potente. Il concetto fondamentale di tale teoria è riassunto nella parola "*Ausdehnungslehre*", tradotta come "teoria dell'estensione". Mediante l'operazione di *prodotto esterno* si può estendere infatti un oggetto ad una dimensione superiore.

Passiamo ora alla estensione dei concetti fino ad ora visti secondo l'algebra di Grassmann (cf. [Cro67]).

### 2.2.1 Forme di ordine superiore

Le forme lineari fino ad ora introdotte si applicano ad un solo vettore, sono perciò definite semplicemente **lineari**, oppure, mettendo in evidenza la "dimensione" della forma, ovvero il numero di vettori cui la forma stessa deve essere applicata, **1-forma**.

Definiamo dunque una forma di ordine superiore al primo:

**Definizione 35 (forma).** *Si definisce **forma esterna**, o in modo più semplice **forma** una forma sullo spazio vettoriale  $V$*

$$\varphi : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{volte}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

con le seguenti proprietà:

1.  $\varphi$  sia multilineare

2.  $\varphi$  sia alternante

La multilinearità è una estensione della **bilinearità** dei prodotti tensore:

**Definizione 36 (Forma bilineare).** Siano  $\alpha$  e  $\beta$  due covettori (1-forme), l'applicazione

$$\alpha \otimes \beta \quad : \quad V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

è chiamata **prodotto tensore**, o **forma bilineare**, definita come:

$$(\alpha \otimes \beta)(u, v) = \langle \alpha, u \rangle \cdot \langle \beta, v \rangle \quad (2.5)$$

Possiamo dunque generalizzare il concetto di linearità:

**Definizione 37 (Forma multilineare).** Una forma è detta **multilineare**, oppure **k-lineare**:

$$(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k)(u_1, \dots, u_k) = \prod_{i=1}^k \langle \alpha_i, u_i \rangle \quad (2.6)$$

Definiamo in ultima analisi l'alternanza:

**Definizione 38 (Forma alternante).** Sia  $\theta(v_1, \dots, v_k)$  una forma k-lineare e sia  $\sigma$  una permutazione di k oggetti. Allora  $\theta$  dicesi **alternante** se

$$\theta(\sigma(v_1, \dots, v_k)) = \theta(v_1, \dots, v_k) \cdot \text{sgn}(\sigma) \quad (2.7)$$

## 2.2.2 Il prodotto esterno

La definizione di forma multilineare non aiuta la creazione di tali forme. Dalle 1-forme però è possibile creare k-forme alternanti. Definiamo prima di tutto un operatore che, data una forma multilineare, dia una forma multilineare alternante:

**Definizione 39 (Alternatore).** Sia  $\theta$  una forma k-lineare. Si definisce **alternatore** la funzione:

$$\mathbb{A}\theta = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \theta(\sigma(u_1, \dots, u_k)) \quad (2.8)$$

dove  $S_k$  è l'insieme di tutte le permutazioni di k elementi.

Possiamo definire anche l'operatore inverso:

**Definizione 40 (Simmetrizzatore).** Sia  $\theta$  una forma multilineare. Si definisce **simmetrizzatore** la funzione:

$$(\mathbb{S}\theta) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma_k \in S_k} \theta(\sigma(u_1, \dots, u_k)) \quad (2.9)$$

dove  $\sigma_k$  è una permutazione di  $k$  elementi, e  $S_k$  è l'insieme di tutte le permutazioni di  $k$  elementi.

**Proprietà 7.** Siano  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{S}$  l'alternatore ed il sintetizzatore, allora

$$\mathbb{A}^2 = \mathbb{A} \quad (2.10)$$

$$\mathbb{S}^2 = \mathbb{S} \quad (2.11)$$

Avendo ora definito le forme multilineari e l'alternatore per adattare tali forme alla definizione di  $k$ -forma, possiamo definire l'operazione fondamentale dell'algebra di Grassmann grazie alla quale è possibile creare  $k$ -forme a partire da forme di ordine inferiore.

**Definizione 41 (Prodotto esterno).** Siano  $\alpha$  e  $\beta$  due 1-forme. Definiamo **prodotto esterno** delle due 1-forme:

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha = 2\mathbb{A}(\alpha \otimes \beta) \quad (2.12)$$

Tale prodotto produce una 2-forma esterna. Più in generale, avendo  $\alpha$  e  $\beta$  rispettivamente una  $r$ -forma ed una  $s$ -forma, si definisce la  $(r + s)$ -forma:

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(r + s)!}{r!s!} \mathbb{A}(\alpha \otimes \beta) \quad (2.13)$$

## 2.3 Multivettori

In precedenza abbiamo definito *vettore* come un rappresentante della classe d'equivalenza dei segmenti orientati. Così come è stato lecito ed opportuno ampliare il concetto di forma lineare ad uno più generale di forma **multilineare**, è altresì lecito ampliare il concetto di vettore ad uno più ampio di **multivettore**.

### 2.3.1 Dal vettore al multivettore

Consideriamo dunque delle celle orientate di dimensione  $k$ , ovvero delle  **$k$ -celle**, possiamo introdurre una classe d'equivalenza rispetto alla loro direzione. Analogamente a quanto si è fatto per i vettori, o meglio, con il linguaggio proprio dell'algebra di Grassmann, per gli *1-vettori*, in ogni classe si può scegliere un **rappresentante**, il quale sarà chiamato  **$k$ -vettore**.

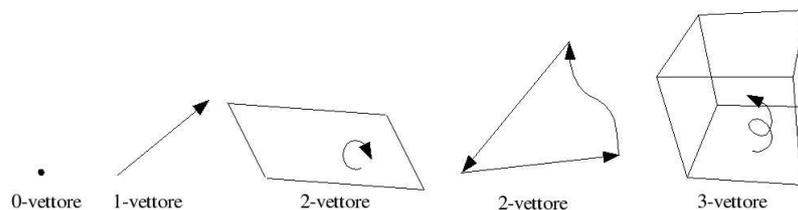


Figura 2.7: Esempi di multivettori

Si parlerà quindi di **k-direzione**, ovvero una generalizzazione del concetto di direzione: per  $k = 1$  si parlerà di *direzione lineare*, per  $k = 2$  di *direzione planare*, e così via.

Ogni multivettore possiede, analogamente ai vettori, una **magnitudine**, ovvero una misura, detta *lunghezza* per 1-vettori, *area* per 2-vettori, per 3-vettori la magnitudine viene denominata *volume* — per  $k > 3$  si parla semplicemente di *k-volume*.

Consideriamo ora  $k$ -celle cubiche, ovvero dei **k-parallelogrammi**: il vettore come segmento orientato è un 1-vettore, un parallelogramma orientato è un 2-vettore, un parallelepipedo un 3-vettore e così via. Per quanto riguarda gli 0-vettori, il loro orientamento è definito positivo.

Sui multivettori, così come lo è sui vettori, è definita la ben nota operazione di **somma**; è altresì definito il **prodotto per uno scalare** in modo equivalente a quanto accadeva con vettori di dimensione 1.

L'operazione fondamentale sui multivettori è l'operazione di **prodotto esterno**. Operazione analoga a quanto già definita per le  $k$ -forme, produce da due 1-vettori un 2-vettore, o più in generale, se  $\alpha$  è un  $s$ -vettore e  $\beta$  è un  $r$ -vettore, allora  $\alpha \wedge \beta$  è un  $(r + s)$ -vettore, con orientamento definito dagli orientamenti dei vettori  $\alpha$  e  $\beta$  seguiti nell'ordine di scrittura. Ciò implica che il prodotto esterno è **anticommutativo**, ovvero goda della proprietà di essere alternante.

Il prodotto esterno di  $k$ -vettori gode di alcune proprietà, in modo del tutto analogo alle proprietà del prodotto esterno di  $k$ -forme:

**Proprietà 8.** *Siano  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  rispettivamente un  $r$ -vettore, un  $s$ -vettore ed un  $t$ -vettore. Allora sono vere le proprietà di distribuzione del prodotto per uno scalare rispetto al prodotto esterno, di associatività, di distribuzione del prodotto esterno rispetto alla somma di vettori a destra e sinistra, di alternanza:*

1.  $\lambda(\alpha \wedge \beta) = (\lambda\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge (\lambda\beta)$

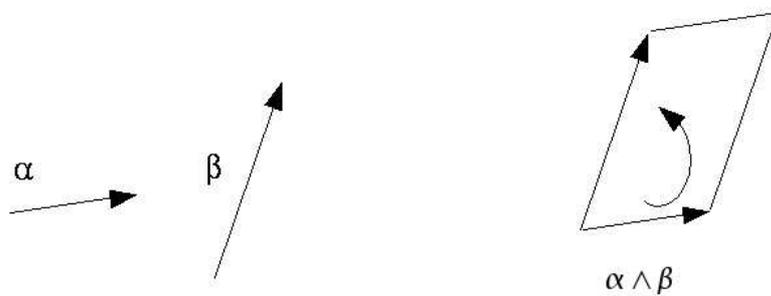


Figura 2.8: Esempio di prodotto esterno

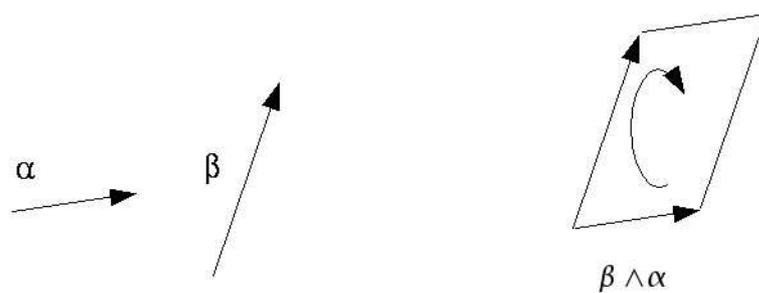


Figura 2.9: Esempi di prodotto esterno

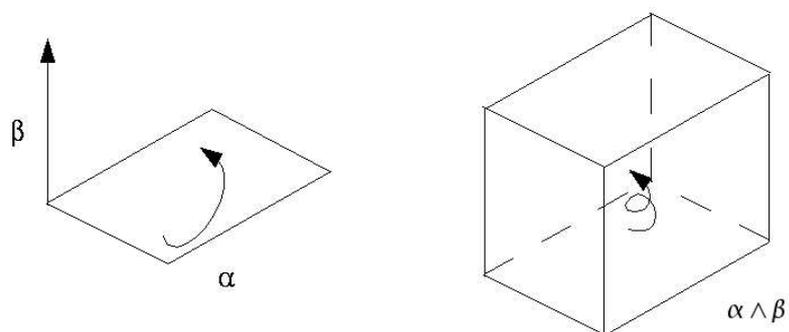


Figura 2.10: Esempio di prodotto esterno tra vettori di dimensione differente

2.  $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
3.  $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$
4.  $(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma$
5.  $\alpha = 1 \wedge \alpha = \alpha \wedge 1$
6.  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$

Esplicitando il prodotto di 1-vettori, si ha  $x \wedge y = -y \wedge x$ , e da ciò si deduce:

$$x \wedge x = 0 \quad (2.14)$$

L'apparente semplicità del prodotto esterno ha un forte impatto sulla nozione di *dipendenza lineare* di vettori.

**Proprietà 9.** *Siano  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dei vettori. Allora tali vettori sono linearmente dipendenti se e solo se  $x_1 \wedge \dots \wedge x_n = 0$*

## 2.3.2 Forme e multivettori

Tra k-forme e k-vettori vi è un fortissimo legame, dal momento che le k-forme appartengono allo spazio duale dei k-vettori. Così come è stato possibile avere una rappresentazione geometrica delle forme, è altrettanto possibile averne una per le k-forme.

È già stata fornita in 2.1.2 una interpretazione delle forme lineari come misura dei vettori: le 1-forme “misurano” gli 1-vettori in assenza di metrica. La figura 2.2 evidenzia la differenza tra misura euclidea e misura tramite una 1-forma.

Per semplicità di disegno e di espressione, ci riferiremo soltanto alle **2-forme**, ma come è intuibile, il ragionamento può essere esteso facilmente a forme di dimensione qualunque (cf. [Car02a]).

Si esamini prima di tutto il significato del prodotto esterno valutato su due vettori: il prodotto esterno su due vettori è la **misura dell'area del 2-vettore** derivante dal prodotto esterno dei due 1-vettori. Si analizzi dunque il prodotto esterno: siano  $\alpha$  e  $\beta$  due 1-forme ed  $u$  e  $v$  due 1-vettori (figura 2.11). Allora è per definizione

$$(\alpha \wedge \beta)(u, v) = (\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha)(u, v) \quad (2.15)$$

E dunque, per applicazione del prodotto tensoriale

$$(\alpha \wedge \beta)(u, v) = \langle \alpha, u \rangle \langle \beta, v \rangle - \langle \beta, u \rangle \langle \alpha, v \rangle \quad (2.16)$$

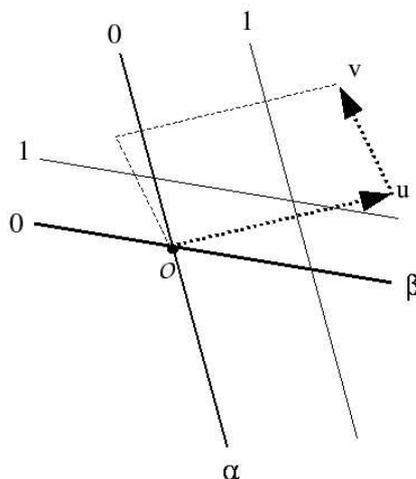


Figura 2.11: Esempio di 2-forma

Poichè l'area è invariante rispetto allo scorrimento, applichiamo uno scorrimento al parallelogramma  $(u, v)$  in modo da ottenere un parallelogramma equivalente  $(u', v)$  con  $u'$  appartenente allo spazio nullo di  $\beta$ , ottenendo

$$(\alpha \wedge \beta)(u, v) = (\alpha \wedge \beta)(u', v), \quad u' = \lambda v + u \quad (2.17)$$

Applicando un secondo scorrimento equivalente al primo, possiamo ottenere un parallelogramma  $(u', v')$  equivalente a  $(u', v)$  con  $v'$  appartenente allo spazio nullo di  $\alpha$ .

Abbiamo dunque ottenuto un parallelogramma del tutto equivalente al primo, a cui possiamo applicare il prodotto esterno:

$$(\alpha \wedge \beta)(u, v) = (\alpha \wedge \beta)(u', v') = \langle \alpha, u' \rangle \langle \beta, v' \rangle - \langle \beta, u' \rangle \langle \alpha, v' \rangle \quad (2.18)$$

Poichè  $u'$  e  $v'$  appartengono per costruzione rispettivamente allo spazio nullo di  $\beta$  e di  $\alpha$ , si ha

$$(\alpha \wedge \beta)(u, v) = (\alpha \wedge \beta)(u', v') = \langle \alpha, u' \rangle \langle \beta, v' \rangle \quad (2.19)$$

Che ricalca esattamente la formula nota dalle scuole elementari per il calcolo dell'area di un parallelogramma *base*  $\times$  *altezza*.

La 2-forma è quindi rappresentata dal parallelogramma individuato dalle 1-forme  $\alpha$  e  $\beta$  di area 1, ovvero, un 2-vettore di dimensioni equivalenti ha come misura 1.

Tale risultato è estendibile a forme di ordine superiore, valutando il *volume* di un 3-vettore grazie alla applicazione di una 3-forma, ed in generale, una  $k$ -forma valuta il  $k$ -volume di un  $k$ -vettore.

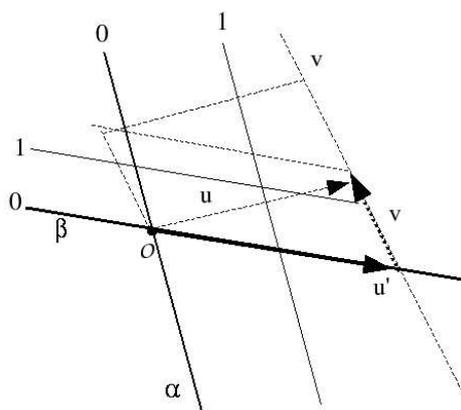


Figura 2.12: Esempio di 2-forma — Primo scorrimento  $(u', v')$

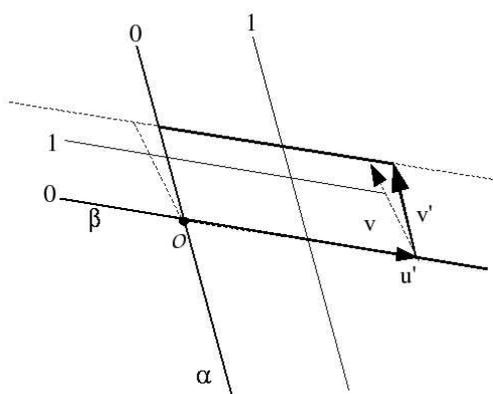


Figura 2.13: Esempio di 2-forma — Secondo scorrimento  $(u'', v'')$

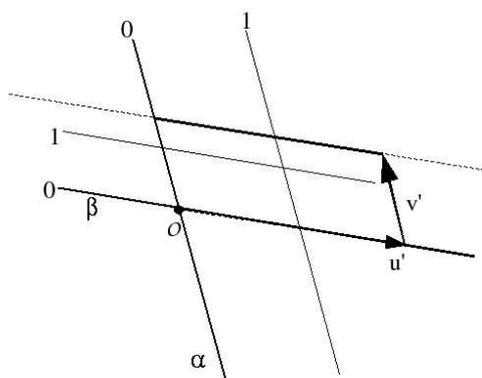


Figura 2.14: Esempio di 2-forma — Risultato degli scorrimenti

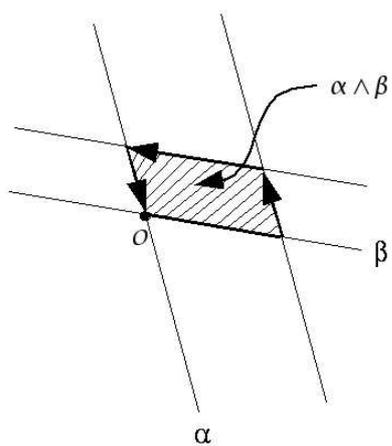


Figura 2.15: Esempio di 2-forma — Parallelogramma rappresentante

## 2.4 Applicazioni alla fisica

L'algebra di Grassmann ha applicazioni nella fisica per la sua capacità di unire concetti apparentemente differenti come la *forza* ed il *momento*, la *velocità* e la *velocità angolare* (cf. [Bro01]).

Un altro importante risultato è il fatto che tale formalizzazione dei concetti fisici li rende *indipendenti dalla dimensione*.

Un ultimo appunto riguardo l'algebra dei multivettori è sulla sua *indipendenza metrica*: non è infatti richiesto che lo spazio in considerazione sia uno spazio metrico.

### 2.4.1 Forze e multivettori

La nozione fisica di **forza** involve i concetti di *magnitudine*, di *direzione* e di *verso*. Tale concetto è immediatamente esprimibile con un prodotto esterno tra due vettori:

$$\mathbb{F} = P \wedge f \quad (2.20)$$

Il vettore  $f$  è il *vettore forza*, esprime direzione e verso — *in uno spazio metrico esprimerebbe anche la magnitudine*.  $P$  è uno 0-vettore, e può essere espresso come somma di due vettori, l'origine  $O$  ed il vettore posizione  $\nu$ . L'operazione  $P \wedge f$  pone il vettore  $f$  sul punto  $P$ , ovvero non è più un vettore libero, ma vincolato ad un punto.

L'espressione è tanto potente in quanto esprime concetti diversi senza l'ausilio di condizioni ulteriori. Pensando alla *forza gravitazionale* secondo Newton, la sua rappresentazione è

$$\mathbb{F}_{12} = G \frac{m_1 \wedge m_2}{R^2} \quad (2.21)$$

Da notare come tale espressione cambi di segno se si scambiano i fattori  $m_1$  ed  $m_2$  del prodotto esterno, corretto dal punto di vista fisico, e non è necessario alcun ulteriore controllo sull'ordine delle masse.

### 2.4.2 Momenti e multivettori

Come già in precedenza espresso, il *momento* di una forza è facilmente esprimibile in modo algebrico. Consideriamo un **sistema di forze** esprimendolo con una somma di vettori vincolati:

$$\mathbb{F} = \sum_i P_i \wedge f_i \quad (2.22)$$

Possiamo manipolare l'espressione sommando e sottraendo  $P \wedge \sum_i f_i$  ottenendo:

$$\mathbb{F} = P \wedge \left( \sum_i f_i \right) + \sum_i (P_i - P) \wedge f_i \quad (2.23)$$

Abbiamo dunque riferito l'espressione al punto  $P$ . Tale espressione risulta indipendente da  $P$  grazie alla eliminazione di tale fattore: la somma è *invariante* rispetto al punto scelto.

Il primo termine della somma, è un prodotto esterno di un punto per una somma di forze. Tale somma è la *risultante delle forze*, esprimibile con un singolo vettore:

$$f = \sum_i f_i \quad (2.24)$$

Il secondo termine è una somma di bivettori. Tale 2-vettore e può essere visto come *il momento della forza*  $P_i \wedge f_i$  riferito al punto  $P$ :

$$M_{iP} = (P_i - P) \wedge f_i \quad (2.25)$$

Dunque

$$M_P = \sum_i (P_i - P) \wedge f_i \quad (2.26)$$

L'intera espressione dunque risulta essere:

$$\mathbb{F} = P \wedge f + M_P \quad (2.27)$$

Tale espressione quindi riassume al suo interno le condizioni rispetto alla risultante delle forze ed alla somma dei momenti di tali forze, perciò le condizioni di bilancio sono riassunte nella semplice espressione algebrica:

$$\mathbb{F} = P \wedge f + M_P = 0 \quad (2.28)$$

# Capitolo 3

## Rappresentazioni differenziali

Questo capitolo ha lo scopo di introdurre una particolare forma, chiamata **forma differenziale**, evidenziando la connessione tra queste ed un oggetto della topologia algebrica, le **cocatene**. In tale contesto viene esposta la struttura dati *Starplex* (cf. [Sha00]), introducendo poi il teorema di Stokes.

Per approfondimenti riguardanti la topologia algebrica si consultino i testi [Mun84], [Hat02], [Tho02], [Ada72]. Altra interessante fonte riguardante l'applicazione della topologia algebrica a problemi geometrici è [Ste00].

### 3.1 Richiami di analisi

Prima di addentrarci nella definizione delle forme differenziali, è bene richiamare alcuni concetti fondamentali dell'analisi matematica (cf. [Ava91]). Nel precedente capitolo si sono introdotti gli *spazi vettoriali*. In relazione alla fisica, è bene usare una restrizione alla generalità con cui possono essere trattati questi argomenti, restringendo gli *scalari* ai *reali*  $\mathbb{R}$ .

#### 3.1.1 Campi

Definiamo ora la nozione di **campo**, vettoriale e scalare, indicando con  $V$  lo spazio vettoriale supporto dello spazio affine  $E$ , fissando un sottoinsieme aperto non vuoto  $C \subset E$ .

**Definizione 42 (Campo vettoriale).** *Dicesi **campo vettoriale** una funzione  $v$ :*

$$v : C \longrightarrow V$$

**Definizione 43 (Campo scalare).** *Dicesi **campo scalare** una funzione  $f$ :*

$$f : C \longrightarrow \mathbb{R}$$

Un campo scalare è completamente descritto dalle **superfici di livello**

$$f(P) = c \quad c = \text{costante} \quad (3.1)$$

In modo analogo, un campo vettoriale è descritto tracciando curve regolari che in ogni punto  $P$  hanno vettore tangente il vettore  $v(P)$  applicato in  $P$ . Tali curve vengono denominate **linee di flusso** del campo.

Continuamente si è ricorso all'uso di tali entità nella fisica. Basti pensare ad un corpo posto ad una certa temperatura: in ogni punto del corpo, si può misurare la temperatura e tracciare le superfici dove la temperatura risulti costante. Tali superfici sono conosciute come *isoterme* ed il campo è noto come *campo termico*. Altri campi sono noti, come il *campo delle pressioni*, con le superfici dette *isobare*. Per quanto riguarda i campi vettoriali, è palese a chiunque il *campo gravitazionale*, con le linee di flusso uscenti da sfere centrate nel punto in cui vi è la massa in considerazione.

Ogni campo vettoriale  $v$  può essere considerato come la sovrapposizione di due campi:

$$I_v = |v| \quad (3.2)$$

detto delle **Intensità** definito  $\forall P \in C$ , e

$$d_v = \frac{v}{|v|} \quad (3.3)$$

chiamato campo delle **Direzioni** definito in  $\{P \text{ t.c. } v(P) \neq 0\}$ .

Sui campi sono definite le note operazioni di **gradiente**, **divergenza** e **rotore**.

### 3.1.2 Forme differenziali

Si prenda in considerazione il concetto di **forma differenziale**, fondamentale strumento per la modellazione matematica dei fenomeni fisici, dal momento che le equazioni che regolano tali fenomeni sono modellate solitamente secondo equazioni alle derivate parziali. Cf. [dC71].

Allo spazio  $\mathbb{R}^n$  si può associare lo spazio duale  $\mathbb{R}^{n*}$ , insieme delle funzioni lineari

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Una base per tale spazio è ottenuta prendendo in considerazione  $dx_i$ , dove  $x_i$  è la funzione che associa ad un punto  $P$  l' $i$ -esima coordinata.

**Definizione 44 (Forma differenziale lineare).** *Sia un campo vettoriale  $v$ . Allora il prodotto scalare  $v(P) \cdot dP$  ha l'espressione*

$$\varphi = \sum_i v_i dx_i \quad (3.4)$$

e si definisce **forma differenziale lineare**, oppure **forma esterna di ordine 1**.

Interpretando il significato fisico di tale definizione, si ha che se  $v$  è un campo di forza, allora la forma differenziale  $\varphi = v(P) \cdot dP$  rappresenta il lavoro elementare compiuto dalla forza.

Precisando la definizione, risulta evidente che  $\varphi$  è funzione di  $P$  e  $dP$ , lineare nelle componenti di  $dP$ , ovvero  $dx_i$ , dipendente da  $P$  attraverso le componenti  $V_{x_i}$ . Forme differenziali quindi si possono sommare e moltiplicare per uno scalare, ottenendo sempre una forma differenziale.

Si prendano in considerazione due forme lineari  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Sia  $\Lambda^2(\mathbb{R}^{n*})$  l'insieme delle funzioni bilineari alternanti  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora si può ottenere un elemento  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{n*})$  ponendo

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) = \det(\varphi_i(v_j))$$

È facile vedere come l'insieme  $\{dx_i \wedge dx_j, i < j\}$  è una base per  $\Lambda^2(\mathbb{R}^{n*})$ . Inoltre si ha che

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \quad i \neq j \quad (3.5)$$

$$dx_i \wedge dx_i = 0 \quad (3.6)$$

**Definizione 45 (Forma differenziale quadratica).** Si definisce **forma differenziale quadratica**, oppure **forma esterna di ordine 2**, la forma  $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{n*})$ :

$$\omega = \sum_{i < j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j \quad (3.7)$$

Si può generalizzare la nozione di forma differenziale, in modo analogo a quanto effettuato per i covettori. Sia  $\Lambda^k(\mathbb{R}^{n*})$  l'insieme delle forme k-lineari alternanti

$$\varphi : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{R}$$

Un elemento  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \dots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*})$  lo si può ottenere ponendo

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \dots \wedge \varphi_k(v_1, v_2, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)) \quad (3.8)$$

Dalle proprietà dei determinanti, si evince che  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \dots \wedge \varphi_k$  è k-lineare ed alternante. Inoltre si può dimostrare che l'insieme

$$\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k, \quad i_j \in \{1, \dots, n\}\}$$

è una base per  $\Lambda^k(\mathbb{R}^{n*})$ .

**Definizione 46 (k-forma differenziale).** Si definisce **k-forma differenziale** la forma  $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^{n*})$ :

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad i_j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (3.9)$$

Per comodità di forma, la tupla  $(i_1, \dots, i_k)$ ,  $i_1 < \dots < i_k$ ,  $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$  verrà nel seguito indicata come  $i$  indicando con  $\sigma_i$  la forma base  $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ , potendo scrivere una k-forma differenziale in modo più semplice:

$$\omega = \sum_i a_i \sigma_i \quad (3.10)$$

Per convenzione una 0-forma differenziale è una funzione differenziabile  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 3.2 Forme differenziali e k-vettori

Una interpretazione molto “familiare” delle forme differenziali è quella di “cose che vanno sotto il segno di integrale” (cf. [Sha00]).

La più intuitiva è quella di **densità locali** associate ad un elemento di controllo di dimensione  $k$ . L’interpretazione operativa di tali oggetti è già stata espressa, ed è quella che li introduce per **misurare vettori** quando è assente una metrica.

Tralasciamo ora gli spazi senza metrica definita e poniamoci nel più familiare spazio euclideo, analizzando le connessioni tra le forme differenziali ed i k-vettori.

### 3.2.1 Relazione con le forme differenziali

Si analizzi ora lo spazio euclideo  $E^n$ . È già stato mostrato come sia stretto il legame di dualità tra k-vettori e k-forme, implicando una relazione uno-ad-uno tra loro. Ciò implica che le proprietà di un k-vettore possono essere interpretate come proprietà di un k-covettore.

Si possono evidenziare le strette connessioni tra k-forme differenziali e k-vettori: le operazioni possibili sui k-vettori sono infatti analoghe a quelle effettuabili sulle k-forme differenziali.

Siano  $\omega$  e  $\varphi$  due k-forme:

$$\omega = \sum_i a_i \sigma_i \quad \varphi = \sum_i b_i \sigma_i \quad (3.11)$$

si definisce la **somma**:

$$\omega + \varphi = \sum_i (a_i + b_i) \sigma_i \quad (3.12)$$

Siano dunque  $\omega$  una  $k$ -forma e  $\varphi$  una  $s$ -forma, si può definire il **prodotto esterno**  $\omega \wedge \varphi$  la  $(k + s)$ -forma differenziale:

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{ij} a_i b_j \sigma_i \wedge \sigma_j \quad (3.13)$$

avendo definito

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_i a_i \sigma_i, \quad i \in (i_1, \dots, i_k), \quad i_1 < \dots < i_k \\ \varphi &= \sum_j b_j \sigma_j, \quad j \in (j_1, \dots, j_s), \quad j_1 < \dots < j_s \end{aligned}$$

Un breve esempio del prodotto esterno è tratto da [dC71]: sia  $\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3$  una 1-forma e sia  $\varphi = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3$  una 2-forma differenziale. Allora, poiché  $dx_i \wedge dx_i = 0$  e  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ ,  $i \neq j$ , si ha:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \varphi &= x_2 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + x_3 x_1 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= (x_1 x_3 - x_2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Il prodotto esterno di due forme differenziali gode di proprietà analoghe a quelle del prodotto esterno di  $k$ -vettori:

**Proprietà 10.** *Siano  $\omega$ ,  $\varphi$  e  $\theta$  rispettivamente una  $k$ -forma, una  $s$ -forma ed una  $r$ -forma. Allora*

1.  $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$
2.  $(\omega \wedge \varphi) = (-1)^{ks} (\varphi \wedge \omega)$
3.  $\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$ , se  $r = s$

Da notare come  $dx_i \wedge dx_i = 0$  non implichi che per qualunque forma  $\omega$  sia  $\omega \wedge \omega = 0$ , infatti se

$$\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 dx_3 \wedge dx_4$$

il prodotto esterno sarà

$$\omega \wedge \omega = 2x_1 x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

Come è già stato fatto notare, lo spazio delle  $k$ -forme è uno spazio lineare, e come tale, avrà esattamente  $\binom{n}{k}$   $k$ -forme **base** in  $E^n$ . Esplicitiamo per lo spazio euclideo  $E^3$ . In questo spazio vi saranno  $\binom{3}{0} = 1$  elemento in una base per le 0-forme, per le 1-forme vi saranno  $\binom{3}{1} = 3$  elementi in una base,  $\binom{3}{2} = 3$  elementi in una base per le 2-forme ed infine  $\binom{3}{3} = 1$  elementi per le 3-forme in una base. Queste basi possono essere:

$$\{1\} \quad (0 - \text{forma}) \quad (3.15)$$

$$\{dx, dy, dz\} \quad (1 - \text{forma}) \quad (3.16)$$

$$\{dx \wedge dy, dy \wedge dz, dz \wedge dx\} \quad (2 - \text{forma}) \quad (3.17)$$

$$\{dx \wedge dy \wedge dz\} \quad (3 - \text{forma}) \quad (3.18)$$

Come si evince dalle espressioni, le basi usate sono basi **ortogonali**, cosa naturale trovandosi in uno spazio euclideo.

Per combinazione lineare degli elementi delle basi, è possibile ottenere tutte le forme degli spazi relativi come segue:

$$a \quad (0 - \text{forma}) \quad (3.19)$$

$$a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz \quad (1 - \text{forma}) \quad (3.20)$$

$$a_1 dx \wedge dy + a_2 dy \wedge dz + a_3 dz \wedge dx \quad (2 - \text{forma}) \quad (3.21)$$

$$a dx \wedge dy \wedge dz \quad (3 - \text{forma}) \quad (3.22)$$

### 3.3 Star pseudo-complex: Starplex

Fino a questo punto si è assunto che le basi degli spazi siano basi ortogonali, in particolare sono state usate le basi canoniche degli spazi. Questo fatto non implica alcuna limitazione dell'applicazione dei risultati, dal momento che la modellazione matematica di fenomeni fisici in generale assume uno spazio euclideo e basi ortonormali. Più in generale, si potrebbero usare basi qualunque, al costo di appesantimenti analitici.

#### 3.3.1 Le $k$ -cocatene

Si definisce ora un oggetto particolare della topologia algebrica su cui ricadrà la nostra attenzione.

**Definizione 47 (Cocatena).** *Dicesi **cocatena** su un complesso  $C$  a coefficienti in  $K$ , gruppo abeliano, la somma formale:*

$$\sum_{C_i \in C^k} g_i C_i \quad (3.23)$$

dove  $g_i \in K$  e  $C^k$  è il sottoinsieme di celle di dimensione  $k$  assegnata estratte dal complesso di celle  $C$ .

Il gruppo delle cocatene  $k$ -dimensionali su un complesso  $C$  e coefficienti in  $G$  gruppo abeliano, è indicato con

$$C^k(C; G) \quad (3.24)$$

Si può definire una operazione fondamentale sulle cocatene, od anche **k-cocatene** evidenziando la dimensione delle celle utilizzate.

**Definizione 48 (Cobordo).** *Si definisce **cobordo** di una  $k$ -cocatena  $ch$  su un complesso a celle  $K$  a coefficienti in  $G$ , l'operazione*

$$\delta : C^k(K; G) \longrightarrow C^{k+1}(K; G)$$

definita come

$$\delta(c) = \sum_i g_i C_i \quad (3.25)$$

dove i coefficienti  $g_i$  della  $(k + 1)$ -cocatena sono definiti come

$$g_i = \sum_{f \in F^k(C_i)} \sigma(f, C_i) g_f \quad (3.26)$$

dove  $f$  sono le facce della cella  $C_i$  e  $\sigma(f, C_i)$  fornisce il segno dell'orientamento della faccia rispetto all'orientamento della cella  $C_i$ .

Le definizioni di cocatena e di cobordo derivano da quelle di catena e di bordo. Tali definizioni possono essere espresse come somme formali; una trattazione di tali argomenti esula dallo scopo di questa tesi. Per maggiori dettagli, si consulti [Mun84], [Hat02].

L'operazione di cobordo su una  $k$ -cocatena dunque, è possibile se tale cocatena è definita sulle  $k$ -celle di un complesso di dimensioni almeno pari a  $k + 1$ , associando alle celle di quest'ultimo un coefficiente risultante dalla somma con segno dei coefficienti delle facce di ciascuna cella. Nell'esempio in figura, si evidenzia una 1-cocatena, le cui celle sono facce di un complesso di dimensione 2. L'operazione produce una 2-cocatena — nell'esempio in figura le 2-celle sono, in ordine da sinistra a destra,  $C_1, C_2, C_3$ .

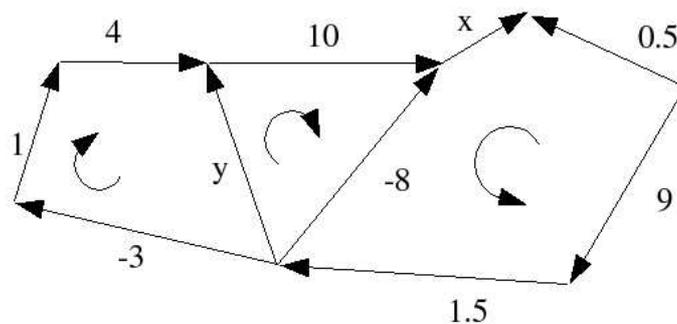


Figura 3.1: Esempio di 1-cocatenata. Sono evidenziate le celle di ordine superiore

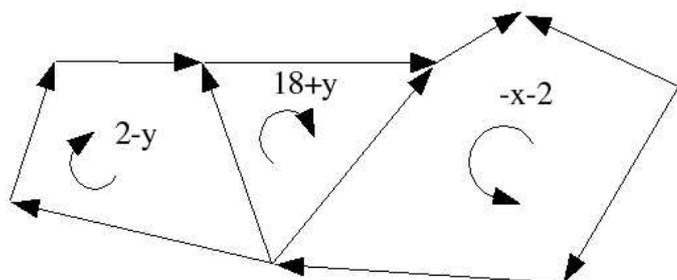


Figura 3.2: Risultato dell'operazione di cobordo:  $\sum_i g_i C_i = (2-y)C_1 + (18+y)C_2 + (-x-2)C_3$

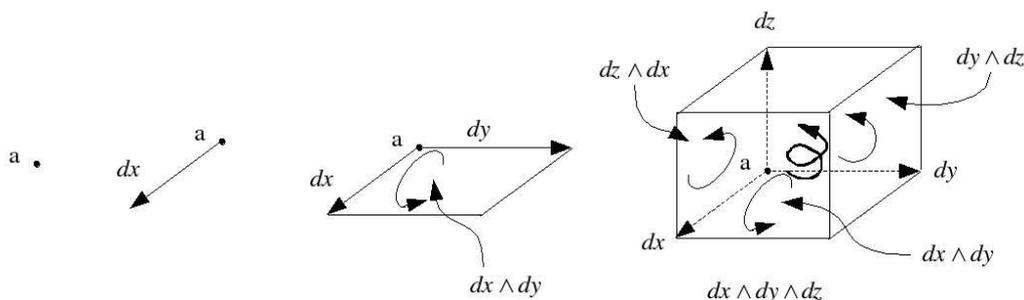


Figura 3.3: Costruzione dello starplex

### 3.3.2 Lo starplex

Si riprende da [Sha00] una struttura particolare, adatta ad esprimere il carattere combinatorio delle basi dei  $k$ -vettori ovvero delle  $k$ -forme, oltre a fornire uno strumento d'ausilio al calcolo differenziale.

È naturale pensare ad un elemento di controllo cubico. Tale struttura, ovvero un complesso cellulare cubico non esprime il carattere combinatorio dei  $k$ -vettori: in un  $k$ -cubo (cubo  $k$ -dimensionale) vi sono  $2^{n-k} \binom{n}{k}$   $k$ -celle, mentre, come già espresso, ne servirebbero soltanto  $\binom{n}{k}$  per esprimere una base  $k$ -dimensionale.

Si presenta quindi la struttura:

**Definizione 49 (Starplex).** *Si definisce **pseudo complesso stella (star pseudo complex)**, o in modo più coinciso, **starplex**, la collezione di tutte le  $k$ -celle generate dai  $k$ -vettori base di  $E^n$ , per  $k = 0, 1, \dots, n$ , mediante l'operazione di prodotto esterno.*

Tale struttura si comprende non essere un complesso di celle: il bordo di ogni cella infatti non è unione di celle appartenenti alla struttura. In figura viene mostrata la costruzione dello starplex in  $E^3$ .

È chiaro come lo starplex sia un *modello combinatorio equivalente ad una base*. Ogni  $k$ -cella corrisponde ad un  $k$ -vettore, l'insieme delle  $k$ -celle corrisponde ad una base  $k$ -dimensionale.

L'adiacenza tra  $k$ -celle e  $(k + 1)$ -celle implica che il  $k$ -vettore corrispondente alla cella di dimensione superiore possa essere definito per prodotto esterno del  $k$ -vettore con un 1-vettore adiacente.

La rappresentazione di una base mediante lo starplex è relativamente intuitiva: una base viene rappresentata mediante l'**etichettatura** degli 1-vettori, dal momento che i vettori di dimensioni superiori vengono generati

dal prodotto esterno dei vettori di ordine inferiore. Così usando come 1-vettori base i familiari nomi degli **assi cartesiani**, dunque  $x, y, z$ , le 2-celle saranno definite immediatamente come  $x \wedge y, y \wedge z, z \wedge x$ , e chiaramente la 3-cella sarà  $x \wedge y \wedge z$ .

Avendo scelto una base, la rappresentazione di un particolare  $k$ -vettore è un problema risolvibile trovando un coefficiente per ogni  $k$ -cella nello starplex e considerando la somma formale *coefficiente*  $\times$  *k-cella*. Una somma formale del genere è già stata introdotta, ed è chiamata **cocatena**. In altre parole, *sia le k-forme che i k-vettori possono essere rappresentati mediante una cocatena sullo starplex*.

Normalmente si usa considerare, per semplificare i calcoli, delle base ortonormali. Usando le note coordinate cartesiane nulla cambia, ma considerando altre basi, come già espresso, si devono considerare coefficienti opportuni. Ad esempio per quanto riguarda le coordinate sferiche, si dovranno includere i coefficienti  $r$  per il vettore  $d\theta$ ,  $r \sin \theta$  per  $d\phi$  includendoli chiaramente nei prodotti esterni delle forme di dimensione superiore.

Assegnando dunque un **nome nullo** ad una cella, equivale ad **eliminare la cella dalla cocatena** e quindi eliminare dalla base. È quindi chiaro come la struttura starplex include tutte e sole le informazioni geometriche e topologiche utili alla descrizione di fenomeni fisici distribuiti spazialmente.

### 3.3.3 Derivazione esterna

Si può dare la definizione di una operazione sulle  $k$ -forme differenziali. La definizione di tale operazione è comunemente data ricorsivamente.

**Definizione 50 (Derivata esterna).** *Si definisce **derivata esterna** di una forma differenziale:*

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad (3.27)$$

per  $f$  una 0-forma, ovvero per una funzione scalare. Considerando una  $k$ -forma differenziale  $\omega = \sum_i a_i \sigma_i$  con  $k \geq 1$ , è:

$$d\omega = \sum_i da_i \wedge \sigma_i \quad (3.28)$$

La derivata esterna di una  $k$ -forma differenziale produce una  $(k+1)$ -forma differenziale.

**Esempio di derivata esterna**

Si può fornire un breve esempio di calcolo della derivata esterna. Sia  $\omega$  la 1-forma differenziale

$$\omega = xyzdx + yzdy + (x + z)dz \quad (3.29)$$

ottenuta dalla combinazione lineare degli elementi della base ortogonale:

$$\sigma_1 = dx \quad \sigma_2 = dy \quad \sigma_3 = dz$$

mediante i coefficienti:

$$a_1 = xyz \quad a_2 = yz \quad a_3 = x + z$$

Applicando la definizione, calcoliamo i differenziali dei coefficienti:

$$da_1 = yzdx + xzdy + zydz \quad (3.30)$$

$$da_2 = zdy + ydz \quad (3.31)$$

$$da_3 = dx + dz \quad (3.32)$$

Dunque la derivata esterna è:

$$d\omega = (yzdx + xzdy + xydz) \wedge dx + (zdy + ydz) \wedge dy + (dx + dz) \wedge dz \quad (3.33)$$

Applicando la proprietà distributiva del prodotto esterno si ottiene:

$$d\omega = yzdx \wedge dx + xzdy \wedge dx + xydz \wedge dx + zdy \wedge dy + ydz \wedge dy + dx \wedge dz + dz \wedge dz \quad (3.34)$$

Ricordando che  $dx_i \wedge dx_i = 0$  e che  $\varphi \wedge \theta = -\theta \wedge \varphi$ , si ha:

$$d\omega = -xzdx \wedge dy - xydx \wedge dz - ydy \wedge dz + dx \wedge dz = \quad (3.35)$$

$$= -xzdx \wedge dy + (1 - xy)dx \wedge dz - ydy \wedge dz \quad (3.36)$$

**3.3.4 Interpretazione geometrica**

La definizione di derivata esterna, è data mediante le operazioni di *derivazione parziale* e di *prodotto esterno*. La relazione tra questa operazione e l'operazione di **cobordo** appare molto evidente. È dimostrato il legame stretto tra derivazione esterna e gli operatori *gradiente*, *divergenza* e *rotore*. Inoltre in letteratura è nota la corrispondenza di queste operazioni di calcolo vettoriale con l'operazione di cobordo  $\delta$  (cf. [Bra66], [Dar94]).

Questo legame è ovvio riprendendo le equazioni che definiscono la derivata esterna comparandola alla operazione di cobordo:

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

$$\delta(k) = \sum_i g_i C_i$$

Eccetto per il coefficiente  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  la derivata esterna corrisponde al cobordo di una 0-forma: è infatti la somma formale dei coefficienti (la funzione  $f$ ) “attaccati” alle 1-celle adiacenti (la base  $dx_i$ ). La generalizzazione per le  $k$ -forme corrisponde sempre alla operazione di cobordo: ogni operazione di prodotto esterno è tra una 1-forma  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$  e la  $k$ -forma base  $\sigma_j$ :

$$d\omega = \sum_i \left( \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge \sigma_j$$

$$\delta(k) = \sum_i g_i C_i$$

È da notare come molti coefficienti saranno nulli: gli unici non nulli saranno quelli associati alle celle **linearmente indipendenti** da  $\sigma_i$ , ovvero sulle celle *ortogonali*.

La derivazione esterna quindi può essere messa in relazione con il cobordo mediante un semplice algoritmo (cf. [Sha00]):

1. Per ogni  $k$ -cella, trasferimento del coefficiente sulle 1-celle ortogonali
2. Modifica dei coefficienti mediante  $\frac{\partial}{\partial \text{cella}}$  per ogni 1-cella  $dx_i$
3. Calcolo del cobordo

Negli esempi in figura vengono riportati due esempi di calcolo della derivata esterna mediante lo starplex. Il primo esempio è la derivata di una 1-forma differenziale in uno spazio a due dimensioni:

$$\omega = f dx + g dy \tag{3.37}$$

$$d\omega = \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy \right) \wedge dy = \tag{3.38}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy = \tag{3.39}$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy = \tag{3.40}$$

$$= \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy \tag{3.41}$$

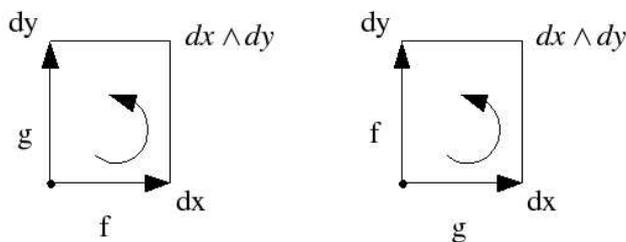


Figura 3.4: Esempio di calcolo della derivata esterna: trasferimento dei coefficienti sulle celle ortogonali

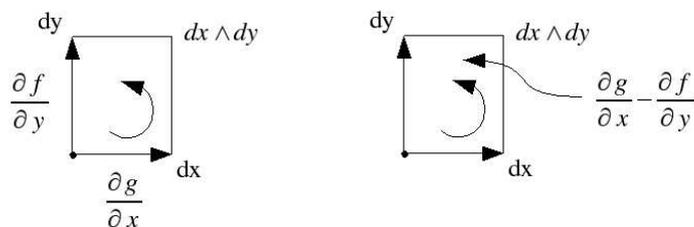


Figura 3.5: Risultato dell'operazione di derivazione esterna

Il secondo esempio, più interessante, mostra l'uso dello starplex per il calcolo della derivata esterna di una 2-forma in  $E^3$ :

$$\omega = f_1 dx dy + f_2 dy dz + f_3 dz dx = \tag{3.42}$$

$$= f_1 dx \wedge dy + f_2 dy \wedge dz + f_3 dz \wedge dx \tag{3.43}$$

Eliminando i prodotti esterni nulli come  $dz \wedge dx \wedge dz$ , si ha:

$$d\omega = \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial f_2}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial f_3}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx = \tag{3.44}$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial z} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial f_2}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial f_3}{\partial y} dx \wedge dy \wedge dz = \tag{3.45}$$

$$= \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) dx \wedge dy \wedge dz \tag{3.46}$$

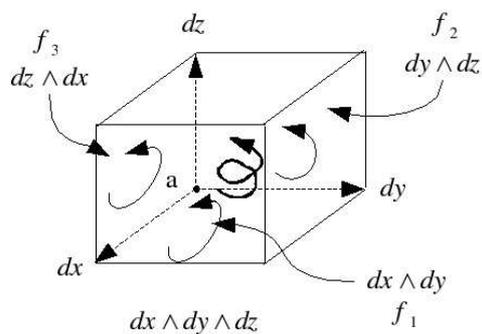


Figura 3.6: Calcolo della derivata esterna di una 2-forma: forma originale

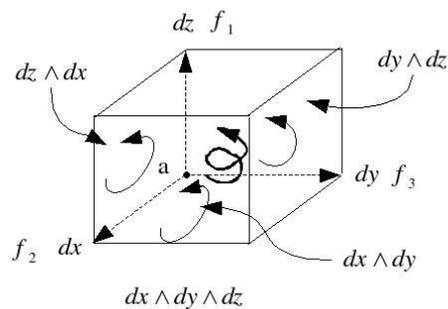


Figura 3.7: Primo passo dell'algoritmo: trasferimento dei coefficienti sulle 2-celle ortogonali

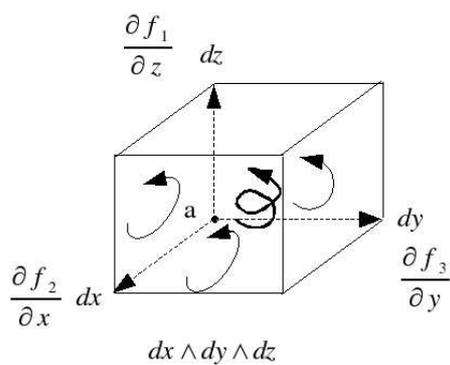


Figura 3.8: Secondo passo dell'algoritmo: differenziazione per cella

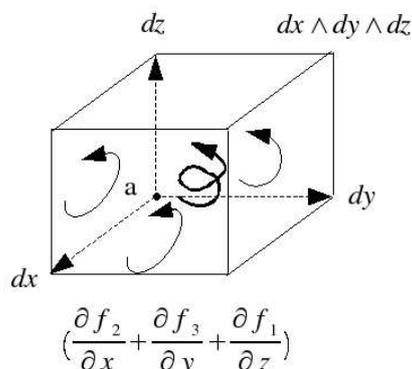


Figura 3.9: Terzo passo dell'algoritmo: calcolo del cobordo e risultato finale

## 3.4 Multivettori e leggi fisiche

Si è notata una analogia tra le forme differenziali, le  $k$ -forme, le  $k$ -cocatene e le operazioni possibili su questi oggetti. Si espone di seguito una applicazione dei risultati fino ad ora conseguiti. Si consultino [Sha00], [Ton75], [Mun84], [Hat02], [Ada72], [Ste00], [Dar94], [Bra66].

### 3.4.1 La legge di bilancio

Una applicazione possibile è la naturale applicazione alla fisica. Molto tempo è passato dalla formulazione simbolica di Leibnitz e Newton, ed il calcolo si è evoluto dal semplice calcolo vettoriale al calcolo tensoriale, passando poi per il calcolo delle forme differenziali e l'algebra di Grassmann.

Il processo di formalizzazione delle leggi fisiche, ha fondamenta nella legge principale della fisica: la **legge di bilancio**. Tale legge impone che la somma sul bordo dell'elemento di controllo della quantità fisica presa in considerazione, che passa attraverso il bordo verso l'interno, sia uguale alla quantità distrutta o immagazzinata all'interno della regione.

Tale legge, per quanto semplice, è estremamente generale. Non è infatti stata posta alcuna condizione sulla forma della regione in considerazione, nè sulla dimensione dello spazio nè sulla quantità fisica. La legge di bilancio è una *legge topologica*. Tale considerazione ha portato Tonti alla dimostrazione del seguente:

**Teorema 1 (di Tonti).** *Una legge di bilancio è sempre esprimibile come*

$$\delta(f) = g \tag{3.47}$$

$$\sum_{\text{bordo}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Quantità fisica} \\ \text{attraverso il bordo} \\ \text{verso l' interno} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Quantità fisica} \\ \text{distrutta oppure} \\ \text{immagazzinata nella} \\ \text{regione} \end{array} \right\}$$

Figura 3.10: Legge di bilancio

dove  $f$  è una  $k$ -cocatena rappresentante le quantità associate alle celle di bordo, e  $g$  è una  $(k + 1)$ -cocatena associata alla produzione interna della cella. Cf. [Ton75].

Un altro importante risultato è dato da Branin, che ha dimostrato come le operazioni di gradiente, divergenza e rotore sono topologicamente delle operazioni di cobordo, con la differenza che il calcolo vettoriale opera su *limiti*, mentre il cobordo opera nel caso *finito*. Tali osservazioni riguardo il cobordo quindi sono valide nel caso sia in considerazione una regione finita. Per la relazione infinitesimale corrispondente occorre trasformare l'operazione di cobordo nell'operazione di derivazione esterna.

### 3.4.2 Il teorema di Stokes

Si è mostrato come la legge di bilancio possa essere espressa attraverso una relazione integrale su un complesso finito, oppure attraverso relazioni infinitesimali differenziali sullo starplex grazie al teorema di Tonti.

è arduo pensare di risolvere problemi legati alla fisica senza uno fra i più importanti teoremi, il **teorema di Stokes**:

**Teorema 2 (di Stokes).** *Sia  $\omega$  una forma differenziale ed  $R$  un complesso di celle, allora è:*

$$\int_{\partial R} \omega = \int_R d\omega \quad (3.48)$$

Tale teorema ha una importanza fondamentale, essendo *indipendente dalla dimensione, indipendente dal sistema di coordinate* ed in ultima analisi *indipendente dalla metrica*. Inoltre il teorema di Stokes indica come passare da una legge di bilancio infinitesimale, cioè come relazione differenziale tra forme, alla forma finita, quindi come relazione integrale espressa tramite l'operazione di cobordo su cocatene.

Considerando ora solo il membro sinistro della relazione del teorema di Stokes. Il membro sinistro può essere scritto mediante il diagramma:

$$\int_{\partial R} \omega = \left\{ \begin{array}{ccc} \text{k-cocatena} & \xrightarrow{\delta} & (k+1)\text{-cocatena} \\ \int \uparrow & & \\ \text{k-forma} & & \end{array} \right. \quad (3.49)$$

dove il primo passaggio verticale corrisponde alla integrazione sul bordo  $\partial R$ . Tale integrazione, essendo  $R$  un complesso di celle, è effettuata *cella a cella*. Il risultato è quindi quello di associare ad ogni cella un coefficiente, risultante dall'integrazione: in altre parole il risultato è una  $k$ -cocatena. Il passaggio orizzontale trasferisce la somma con segno dei coefficienti sulle  $(k+1)$ -celle adiacenti: è evidente il fatto che tale diagramma è una rivisitazione della legge di bilancio.

Analogamente a quanto è stato effettuato per il membro sinistro, si può scrivere il diagramma corrispondente al membro destro:

$$\int_R d\omega = \left\{ \begin{array}{ccc} & & (k+1)\text{-cocatena} \\ & & \uparrow \int \\ \text{k-forma} & \xrightarrow{d} & (k+1)\text{-forma} \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Il teorema di Stokes può essere scritto dunque mediante un diagramma commutativo, ottenuto mediante l'unione dei due diagrammi ottenuti da entrambi i membri del teorema:

$$\begin{array}{ccc} \text{k-cocatena} & \xrightarrow{\delta} & (k+1)\text{-cocatena} \\ \int \uparrow & & \uparrow \int \\ \text{k-forma} & \xrightarrow{d} & (k+1)\text{-forma} \end{array} \quad (3.51)$$

Il diagramma introduce una **tipizzazione dei coefficienti**. Un coefficiente  $F$  di una cella  $\mathbb{C}$  della riga delle cocatene, ovvero della riga superiore del diagramma, rappresenta una *quantità*. Un coefficiente  $g$  della cella infinitesimale della riga inferiore, ovvero della riga delle forme differenziali, rappresenta una *densità*. Poichè tale relazione è data utilizzando  $k$ -vettori, la densità avrà dimensioni differenti: Quantità/Lunghezza, Quantità/Area, Quantità/Volume, ...

### 3.4.3 Il duale del teorema di Stokes

La precedente versione della legge di bilancio è valida se si assume per ogni regione dello spazio. Questa assunzione può essere usata per “*ribaltare*” la

relazione precedente mediante un processo di limite portando la relazione dal finito all'infinitesimale.

Per far ciò, si deve definire l'operazione analoga all'integrazione cella a cella, ovvero la **derivazione per cella** (cf. [RC74])

**Definizione 51 (Derivazione per cella).** *Si definisce derivazione per cella:*

$$\frac{\partial F}{\text{cella}} = \lim_{\|\mathbb{C}\| \rightarrow 0} \frac{F \cdot \mathbb{C}}{\|\mathbb{C}\|} \quad (3.52)$$

dove  $F$  è una funzione che assegna un coefficiente ad ogni  $k$ -cella  $F$ .

Dalla definizione, si evince che  $F$  è una  $k$ -cocatena, il cui valore su ogni  $k$ -cella è uguale all'integrale di una qualche funzione  $f$ <sup>1</sup>.

È possibile scrivere la derivazione per cella in una forma diversa:

$$\frac{\partial F}{\text{cella}} = \lim_{\|\mathbb{C}\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|\mathbb{C}\|} \int_{\mathbb{C}} f(x) d\mathbb{C} = f(x_0) \quad (3.53)$$

evidenziando il fatto che la derivazione per cella, ovvero l'operazione di limite, trasforma un  $k$ -cocatena  $F$  in una forma differenziale  $f$  valutata in un punto  $x_0$ .

Applicando quindi l'operazione  $\partial/\text{cella}$  alle quantità rappresentate da una cocatena su un complesso cubico otteniamo la  $k$ -forma corrispondente. L'operazione di limite inoltre risulta essere *indipendente dal sistema di coordinate* e la direzione della derivazione è implicata dall'orientamento della cella stessa.

La relazione espressa prima in forma finita, può essere quindi scritta in forma infinitesimale usando un processo di limite, ottenendo quindi un diagramma simile al precedente, duale del teorema di Stokes:

$$\begin{array}{ccc} k\text{-cocatena} & \xrightarrow{\delta} & (k+1)\text{-cocatena} \\ \frac{\partial}{\text{cella}} \downarrow & & \downarrow \frac{\partial}{\text{cella}} \\ k\text{-forma} & \xrightarrow{d} & (k+1)\text{-forma} \end{array} \quad (3.54)$$

È implicito il fatto che la derivazione per cella dipende intimamente dalla dimensione della cella stessa. Per celle quindi con lo stesso orientamento di  $dx \wedge dy \wedge dz$ , la notazione  $\partial/\text{cella}$  è in realtà  $\partial^3/\partial x \partial y \partial z$ .

---

<sup>1</sup>La definizione sopra riportata di *differenziazione per cella* corrisponde al fatto che ogni processo di limite su una  $k$ -cocatena produce una  $k$ -forma differenziale unica. Tale dimostrazione di una ragguardevole complessità può essere trovata in [Whi57].

Si può realizzare il “percorso inverso” rispetto a quanto effettuato per il teorema di Stokes. Dal diagramma, si ricavano scindendolo, due espressioni:

$$d\left(\frac{\partial f}{\text{cella}}\right) = \begin{cases} \text{k-cocatena} \\ \frac{\partial}{\text{cella}} \downarrow \\ \text{k-forma} \end{cases} \xrightarrow{d} (k+1)\text{-forma} \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial}{\text{cella}}(\delta f) = \begin{cases} \text{k-cocatena} \\ \xrightarrow{\delta} (k+1)\text{-cocatena} \\ \downarrow \frac{\partial}{\text{cella}} \\ (k+1)\text{-forma} \end{cases} \quad (3.56)$$

Concatenando le due espressioni, si ottiene:

$$d\left(\frac{\partial f}{\text{cella}}\right) = \frac{\partial}{\text{cella}}(\delta f) \quad (3.57)$$

dalla quale ricaviamo l'equivalenza di due formulazioni differenziali della legge di bilancio:

- Un **limite** seguito da una **differenziazione**
- Un **cobordo** seguito da un **limite**

Un esempio dell'applicazione di questa formula è in figura 3.11. Una trattazione più approfondita dei temi affrontati può essere trovata in [Tu82] e [Hes93].

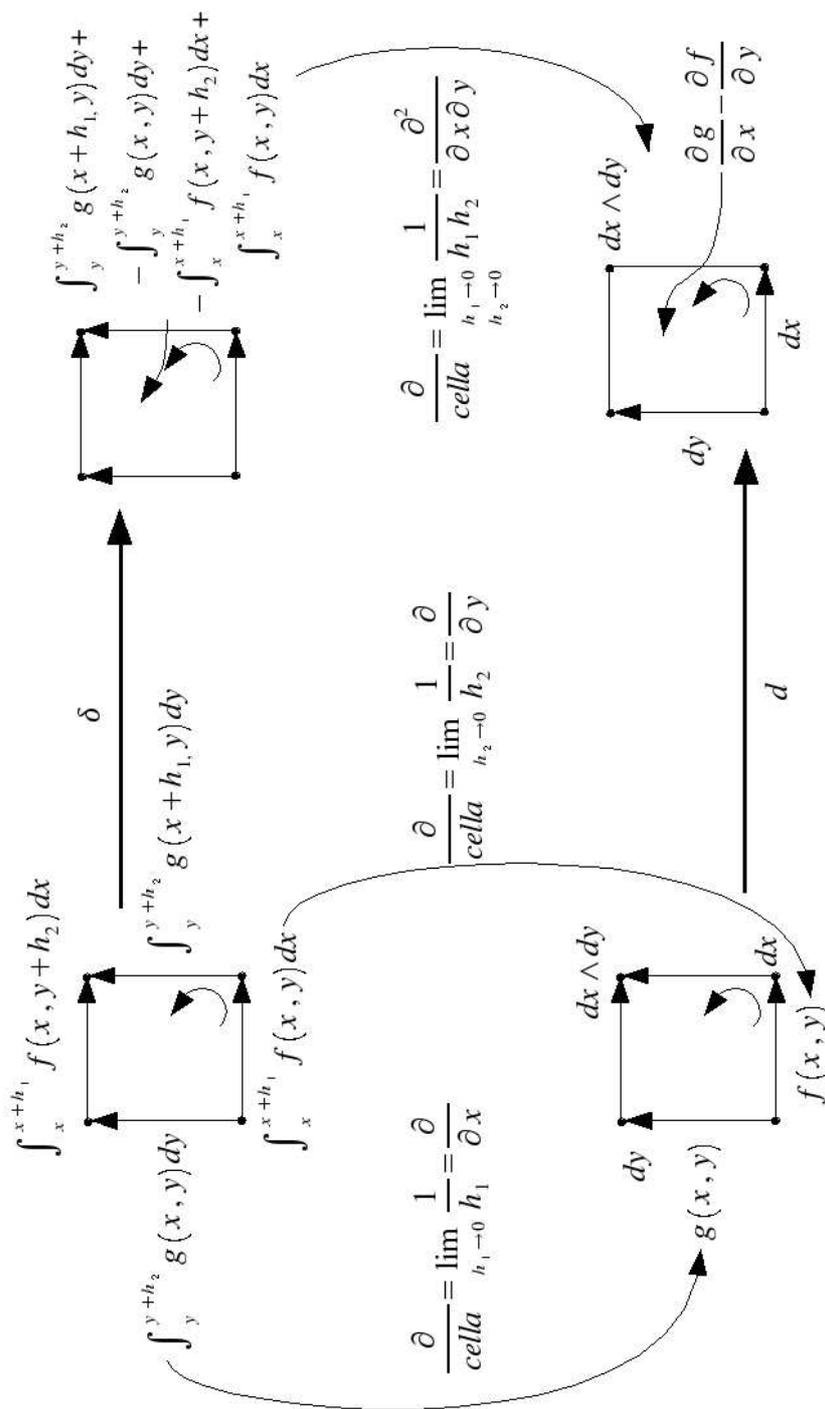


Figura 3.11: Esempio del duale del teorema di Stokes

## Capitolo 4

# Rappresentazione SBSP: Stokes BSP

In questo capitolo viene esposta la struttura dati SBSP. Per definire tale struttura dati è necessario dimostrare la validità di una proprietà delle cocatene.

### 4.1 Motivazioni

È già stata introdotta nel Capitolo 1 la struttura dati *Binary Space Partition* (BSP) ed i vantaggi e svantaggi dell'uso di tale struttura. Molti modellatori solidi stanno introducendo delle rappresentazioni ibride degli oggetti da rappresentare. Sempre più si tende a definire a basso livello degli oggetti mediante l'uso di alberi BSP, creando poi oggetti più complessi mediante rappresentazioni più ad alto livello, come ad esempio una rappresentazione CSG. In figura si mostra un esempio semplice di tale tendenza: una casa può essere rappresentata come una collezione di celle, rappresentate a basso livello ad esempio come alberi BSP, “collegate” tra loro mediante trasformazioni, chiaramente quest'ultima è ad un livello di rappresentazione più alto.

Leggendo l'articolo di Chard e Shapiro (cf. [Sha00]) sullo starplex, ci si riferisce continuamente ad una cella cubica (cubo  $k$ -dimensionale). Viene del tutto naturale riferirsi a tali tipologie di celle, dal momento che lo spazio comunemente utilizzato per descrivere i fenomeni fisici è uno spazio euclideo con base ortonormale, ovvero, classici assi cartesiani  $x_i$ , e per il familiare spazio tridimensionale,  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Sempre in [Sha00] è evidente l'importanza dell'operazione di **cobordo** sulle cocatene, in special modo in riferimento alle forme differenziali ed al teorema di Stokes.

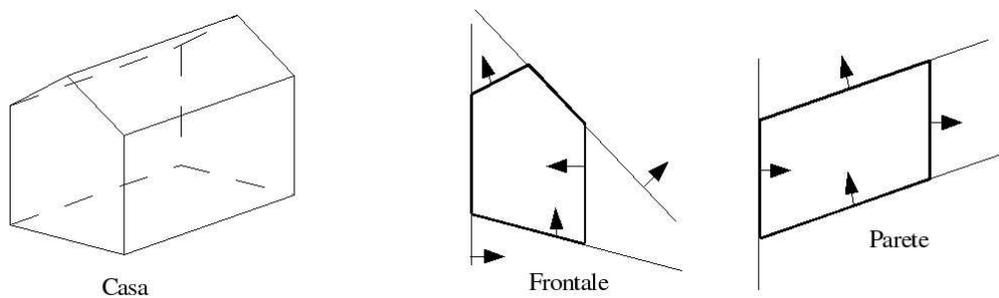


Figura 4.1: Esempio di rappresentazione composita: celle a basso livello

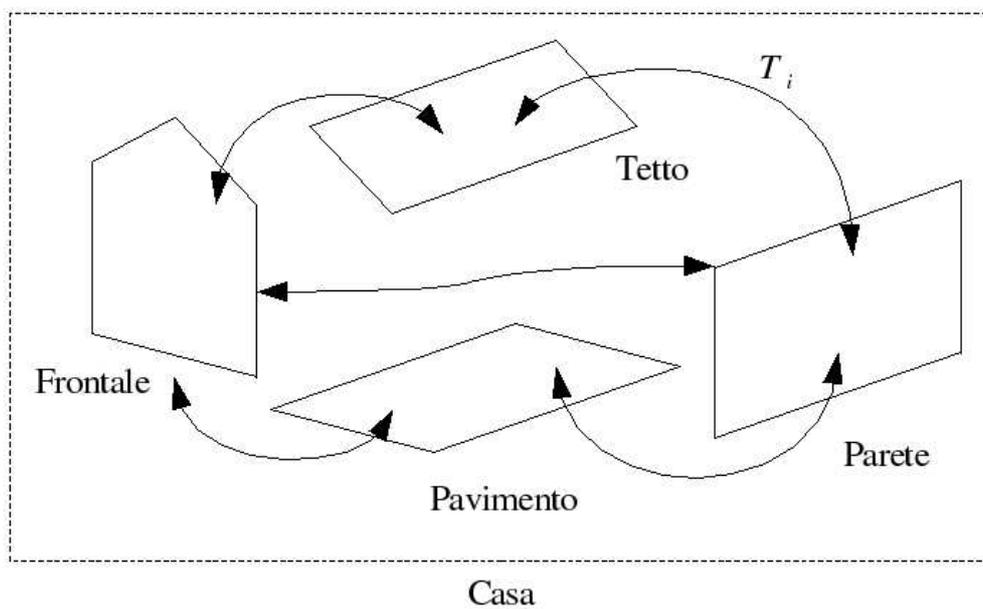


Figura 4.2: Esempio di rappresentazione composita: struttura ad alto livello

Il contributo di questa tesi nasce dallo studio delle varie possibilità di **rappresentazione delle cocatene**: ha senso dunque utilizzare la struttura dati ben nota di **albero BSP** per rappresentare le cocatene e per calcolare il cobordo su di esse. Tale rappresentazione è anche utile quindi per la valutazione di forme differenziali su complessi, mediante il **teorema di Stokes**, da cui il nome della struttura dati.

## 4.2 Cocatene ed alberi BSP

Per poter utilizzare gli alberi BSP per la rappresentazione delle cocatene e poter poi calcolarne il cobordo, è evidente subito una difficoltà.

Gli alberi BSP per definizione utilizzano gli iperpiani di supporto di un complesso e “tagliano” dei sottospazi mediante tali iperpiani. Per poter usare quindi gli alberi BSP, si rendono necessarie le dimostrazioni di alcune proprietà delle k-cocatene.

Si ricordi innanzitutto cosa sono le k-cocatene. La *topologia algebrica* la definisce in modo rigoroso, usando una somma formale:

$$\sum_{C_i \in K} g_i C_i \quad (4.1)$$

Su tali oggetti è definita la funzione di cobordo, funzione che crea una cocatena di dimensione superiore. I coefficiento delle celle sono la somma con segno dei coefficienti delle celle di ordine inferiore che formano le facce della cella in considerazione. L'operazione è esprimibile mediante somma formale:

$$\delta(c) = \sum_i g_i C_i \quad (4.2)$$

I coefficienti sono, come già espresso, la somma con segno dei coefficienti delle facce delle celle in considerazione:

$$g_i = \sum_{f \in F(C_i)} \sigma(f, C_i) g_f \quad (4.3)$$

### 4.2.1 Invarianza del cobordo

Per poter quindi asserire che le cocatene sono rappresentabili mediante alberi BSP, serve dimostrare una proprietà delle cocatene. Sono di seguito espote due definizioni fondamentali per tale dimostrazione. Si suppone nel seguito che siano definite k-cocatene su un complesso e coefficienti in un gruppo abeliano.

**Definizione 52 (Partizione coerente).** Sia  $C$  una  $(n-1)$ -cocatena in  $E^n$  e sia  $H$  una  $n$ -cella adiacente alle celle della cocatena. Definiamo **partizione coerente** della cocatena **mediante l'iperpiano**  $h$  la cocatena definita come:

- La cella  $H$  diviene un complesso di due celle  $H'$  ed  $H''$  individuate dall'iperpiano ed orientate come la cella  $H$
- L'iperpiano genera una  $(n-1)$ -cella  $\alpha$ , cella adiacente ad  $H'$  ed  $H''$  orientata coerentemente
- Le celle "tagliate" dall'iperpiano vengono divise in due celle orientate coerentemente alla cella originale  $C$
- Alle due celle risultanti dal taglio della cella  $C$  con coefficiente  $c$ , vengono associati i coefficienti  $c'$  e  $c''$  tali che  $c' + c'' = c$

Una partizione coerente di una cocatena quindi crea due cocatene adiacenti orientate coerentemente. Ogni cella tagliata genera due celle orientate in modo coerente, con coefficienti la cui somma è uguale al coefficiente della cella originaria. L'iperpiano genera una cella cui è associato un coefficiente  $\alpha \in G$  libero da vincoli.

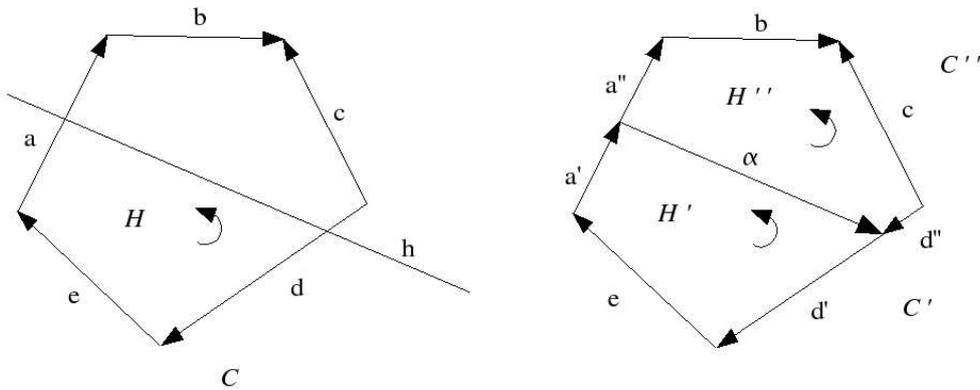


Figura 4.3: Esempio di partizione coerente di una cocatena

**Definizione 53 (Unione coerente).** Siano  $C_1$  e  $C_2$  due  $n$ -celle in  $E^n$ ,  $(n-1)$ -adiacenti, orientate in modo coerente, su cui sia stata definita una  $n$ -cocatena. Definiamo **unione coerente** delle celle del complesso la cella

$$C = C_1 \cup C_2 \tag{4.4}$$

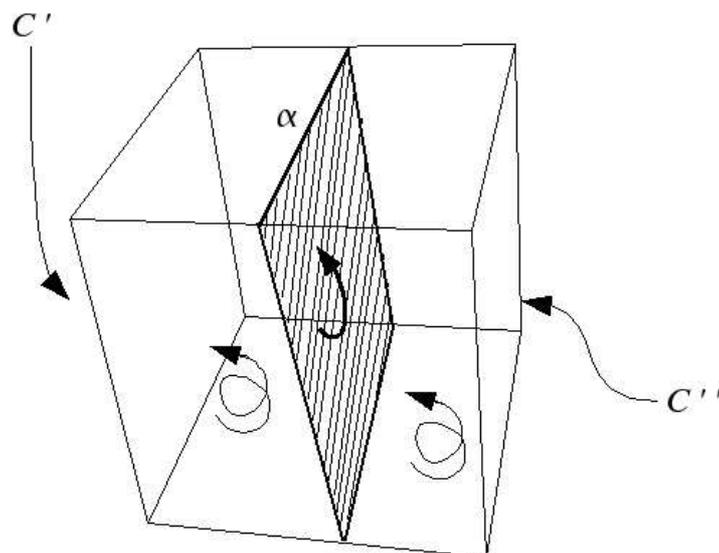


Figura 4.4: Esempio di partizione coerente di una 2-cocatena

risultante dalla “cancellazione” dell’adiacenza, orientata come le celle originarie, il cui coefficiente è la somma dei coefficienti delle celle  $C_1, C_2$ . Risulta quindi su  $C$  definita una  $n$ -cocatena.

Mediante tali operazioni, si può definire una proprietà delle cocatene:

**Teorema 3 (Invarianza del cobordo).** *Il cobordo di una  $k$ -cocatena in  $E^{k+1}$  è uguale all’unione coerente delle celle risultanti dal calcolo del cobordo sulle cocatene originate da una partizione coerente della cocatena originaria.*

*Dimostrazione.* Sia  $C$  una  $(k + 1)$ -cella sulle cui facce sia stata definita una  $k$ -cocatena nello spazio  $E^{k+1}$ . Il cobordo di tale cocatena è una cella  $C^{k+1}$  con coefficiente

$$\sum_{C_i \in C^k} g_{C_i} \sigma(C_i, C) \quad (4.5)$$

Sia quindi  $C$  partizionata in modo coerente mediante un iperpiano  $h$ . La partizione porterà alla creazione di due cocatene  $C'$  e  $C''$ . Siano  $K'$  e  $K''$  l’insieme delle celle di  $C^k$  “tagliate” dall’iperpiano rispettivamente appartenenti a  $C'$  e  $C''$ . Risulta quindi il cobordo di  $C'$  essere una cella con coefficiente

$$\bar{\delta}(C') = \sum_{C'_i \in C'} g_{C'_i} \sigma(C'_i, C') \quad (4.6)$$

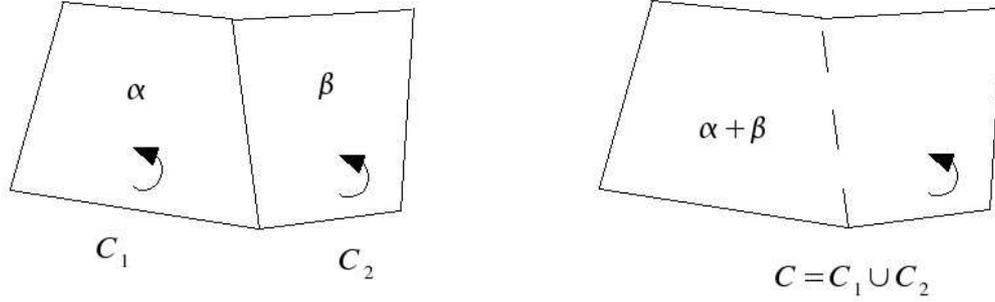


Figura 4.5: Esempio di unione coerente di due 2-celle

Evidenziando in tale somma le celle risultanti dal taglio otteniamo:

$$\bar{\delta}(C') = \sum_{C'_i \in (C' \setminus K')} g_{C'_i} \sigma(C'_i, C') + \sum_{C'_i \in (C' \cap K')} g_{C'_i} \sigma(C'_i, C') \quad (4.7)$$

Tale procedimento è applicato anche alla cocatena su  $C''$ :

$$\bar{\delta}(C'') = \sum_{C''_i \in (C'' \setminus K'')} g_{C''_i} \sigma(C''_i, C'') + \sum_{C''_i \in (C'' \cap K'')} g_{C''_i} \sigma(C''_i, C'') \quad (4.8)$$

Questi sono i coefficienti delle celle di ordine superiore  $H'$  ed  $H''$ . L'unione coerente di queste due celle è la cella

$$C = H' \cup H'' \quad (4.9)$$

cui è associato per definizione il coefficiente:

$$\bar{\delta}(C') + \bar{\delta}(C'') \quad (4.10)$$

Risulta quindi

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(C') + \bar{\delta}(C'') &= \sum_{C'_i \in (C' \setminus K')} g_{C'_i} \sigma(C'_i, C') + \sum_{C'_i \in (C' \cap K')} g_{C'_i} \sigma(C'_i, C') + \\ &+ \sum_{C''_i \in (C'' \setminus K'')} g_{C''_i} \sigma(C''_i, C'') + \sum_{C''_i \in (C'' \cap K'')} g_{C''_i} \sigma(C''_i, C'') \end{aligned} \quad (4.11)$$

Si prenda in considerazione le due somme sulle celle di  $C' \setminus K'$  e  $C'' \setminus K''$ . In tali insiemi è inclusa la cella creata  $\alpha$ . Mettendo in evidenza quest'ultima,

si ottiene:

$$\sum_{C' \setminus (K' \cup \{\alpha\})} g_{C'_i} \sigma(C'_i, C') + \sum_{C'' \setminus (K'' \cup \{\alpha\})} g_{C''_i} \sigma(C''_i, C'') + \alpha \sigma(\alpha, C') + \alpha \sigma(\alpha, C'') \quad (4.12)$$

Analizzando gli insiemi su cui sono definite le sommatorie, è

$$(C' \setminus (K' \cup \{\alpha\})) \cup (C'' \setminus (K'' \cup \{\alpha\})) = C \setminus K \quad (4.13)$$

dove  $K$  è l'insieme delle celle di  $C$  tagliate. Inoltre risulta essere

$$\sigma(\alpha, C') = -\sigma(\alpha, C'') \quad (4.14)$$

poichè le celle sono orientate coerentemente, quindi

$$\alpha \sigma(\alpha, C') + \alpha \sigma(\alpha, C'') = 0 \quad (4.15)$$

La (4.12) risulta quindi essere

$$\sum_{C_i \in (C \setminus K)} g_{C_i} \sigma(C_i, C) \quad (4.16)$$

poichè le celle di  $C'$  e  $C''$  sono per definizione orientate come le celle di  $C$ .

Si può esaminare la seconda parte della (4.12). Le sommatorie sono sulle celle che risultano tagliate dall'iperpiano:

$$\sum_{C'_i \in (C' \cap K')} g_{C'_i} \sigma(C'_i, C') + \sum_{C''_i \in (C'' \cap K'')} g_{C''_i} \sigma(C''_i, C'') \quad (4.17)$$

Poichè per definizione è

$$g_{C'_i} = \theta'_i g_{C_i} \quad g_{C''_i} = \theta''_i g_{C_i} \quad (4.18)$$

con

$$\theta'_i + \theta''_i = 1 \quad (4.19)$$

e per costruzione risulta essere

$$\sigma(C'_i, C') = \sigma(C''_i, C'') = \sigma(C_i, C) \quad (4.20)$$

la sommatoria è quindi

$$\sum_{C_i \in (C \cap K)} g_{C_i} \sigma(C_i, C) \quad (4.21)$$

Riprendendo quindi la (4.11), si ottiene:

$$\delta(C') + \delta(C'') = \sum_{C_i \in (C \setminus K)} g_{C_i} \sigma(C_i, C) + \sum_{C_i \in (C \cap K)} g_{C_i} \sigma(C_i, C) = \quad (4.22)$$

$$\sum_{C_i \in C} g_{C_i} \sigma(C_i, C) \quad (4.23)$$

Confrontando quindi la (4.5) con la (4.23) l'asserto risulta dimostrato per una singola cella. L'asserto è valido per una cocatena qualunque, ripetendo lo stesso procedimento per ogni cella della somma formale.  $\square$

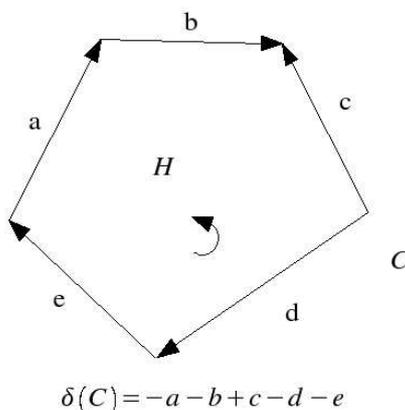


Figura 4.6: Esempio della dimostrazione – Cocatena originaria

Questa proprietà conduce alla formulazione di una diretta conseguenza:

**Proprietà 11 (Cocatene simpliciali).** *Il cobordo di una k-cocatena è equivalente all'unione coerente delle celle originate da una triangolazione delle celle della cocatena. Una cocatena formata da celle di forma simpliciale è detta **cocatena simpliciale**.*

*Dimostrazione.* Sia dunque  $C$  una k-cocatena simpliciale adiacente alla  $(k + 1)$ -cocatena  $H$ . Una triangolazione genera celle di forma simpliciale: vengono create delle celle aggiuntive che “triangolano”  $H$ . Tali celle sono delle k-celle, le quali possono essere “prolungate” fino a tagliare la cocatena: si generano dunque degli iperpiani che tagliano la cocatena. In tale situazione, si ricade nella dimostrazione precedente, reiterando il processo per ogni iperpiano ovvero per ogni k-cella generata.  $\square$

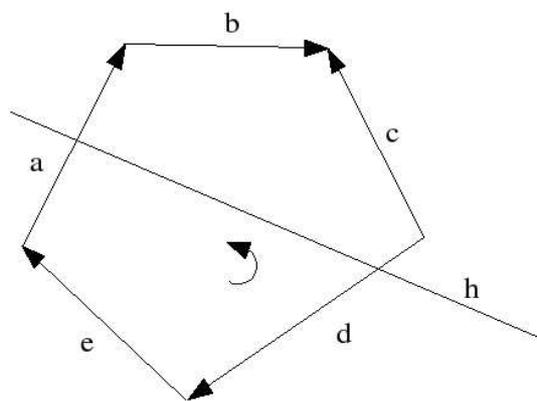


Figura 4.7: Esempio della dimostrazione – Taglio della cocatena

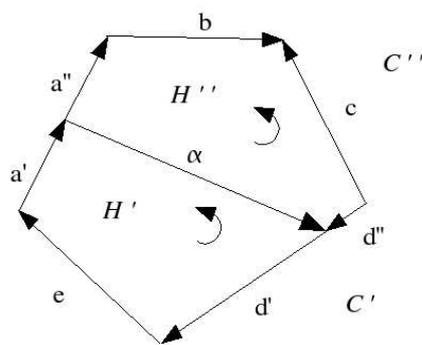


Figura 4.8: Esempio della dimostrazione – Cocatene  $C'$  e  $C''$  originate dal taglio

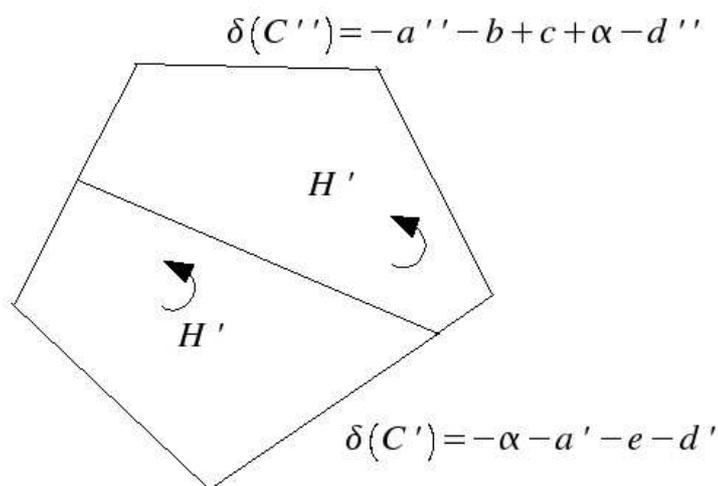


Figura 4.9: Esempio della dimostrazione – Calcolo del cobordo sulle cocatene generate  $C'$  e  $C''$

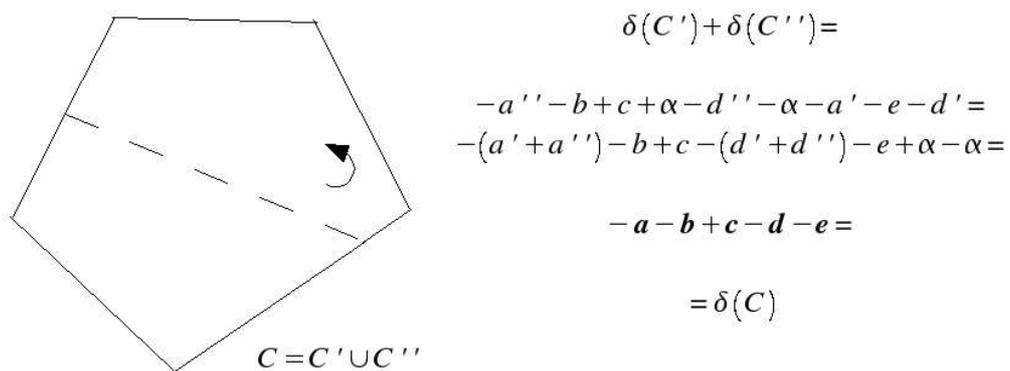


Figura 4.10: Esempio della dimostrazione – Unione coerente delle celle  $H'$  ed  $H''$

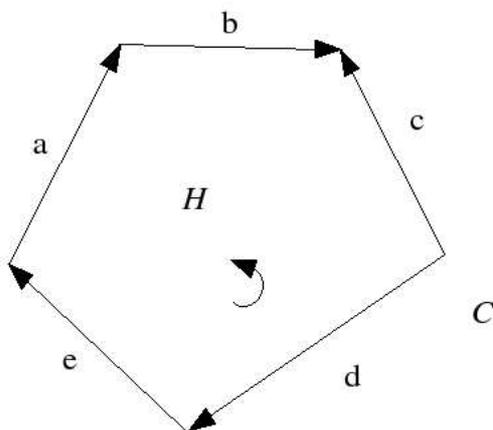


Figura 4.11: Esempio di decomposizione simpliciale — Cocatena originaria

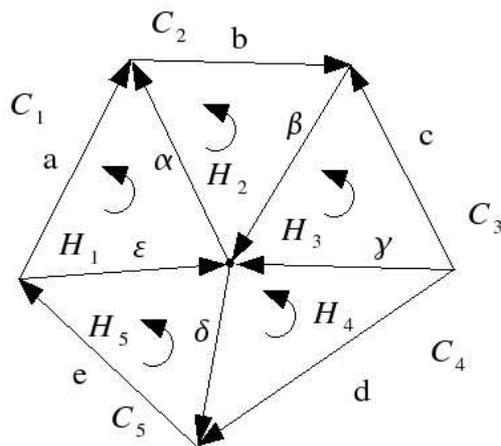


Figura 4.12: Esempio di decomposizione simpliciale — Decomposizione

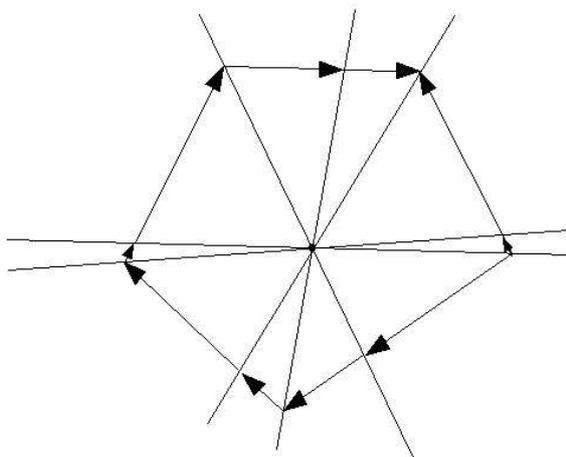


Figura 4.13: Esempio di decomposizione simpliciale — Esempio della dimostrazione

### 4.3 Stokes BSP: SBSP

È stato dimostrato nella sezione precedente come una cocatena possa essere impunemente tagliata da un iperpiano: il cobordo è invariante rispetto a questa operazione. Tale proprietà rende possibile l'uso di alberi BSP per la rappresentazione di cocatene ed il calcolo del cobordo.

Come già evidenziato in precedenza, gli alberi BSP non possono rappresentare qualunque oggetto. Gli alberi BSP possono rappresentare soltanto **oggetti di dimensione piena**. Ciò porta ad una restrizione della rappresentazione di  $k$ -cocatene: in  $E^n$  si rappresentano  $(n - 1)$ -cocatene, che per l'appunto generano una  $n$ -cocatena con l'operazione di cobordo.

Nello SBSP si rappresentano le  $k$ -cocatene associando un **nome** ad ogni  $(k + 1)$ -cella, e per ogni  $k$ -cella, si associa all'iperpiano di definizione, le  $(k + 1)$ -celle cui appartiene, assieme al segno relativo tra le due celle. La struttura BSP viene così modificata: ogni nodo  $\nu$ , oltre a rappresentare una regione convessa, contiene le seguenti informazioni:

1. Il **coefficiente** della  $k$ -cella rappresentata dall'iperpiano in considerazione  $g_\nu$
2. Le  $(k + 1)$ -**celle** cui la  $k$ -cella è adiacente, ovvero i loro **nomi**  $C_\nu$
3. Per ogni  $(k + 1)$ -cella, l'**orientamento relativo**  $sgn_{C_\nu}$

Come avviene per gli alberi BSP, può accadere che un iperpiano tagli una

cella. In tale situazione, come accade nei semplici alberi BSP, le celle vengono divise in due. Per tale operazione, si utilizza l'operazione di **partizione coerente**. La cella creata dalla partizione coerente, non viene presa in considerazione, quindi non viene memorizzata nella struttura dati: ciò equivale ad assegnare un **coefficiente nullo** alla cella generata.

Come già evidenziato, una partizione binaria dello spazio elimina la topologia mantenendo soltanto le informazioni essenziali. Per ricostruire quindi la topologia delle cocatene, è necessario introdurre una struttura di adiacenza tra celle convesse. Per ottenere ciò è sufficiente memorizzare un **grafo d'adiacenza** tra celle con una qualunque struttura dati tra quelle note per la rappresentazione di grafi con archi etichettati, in cui i nodi sono le celle e gli archi sono etichettati con l'iperpiano di supporto dell'adiacenza.

```

struct sbsp_cell_sign
{
    bool         relative_orientation;
    cell_name cell;
}

struct sbsp_node
{
    hyperplane      h;
    abelian_group  coeff;
    list<sbasp_cell_sign> adjacency_list;

    sbsp_node      *above, *below;
}

```

Figura 4.14: Struttura dati SBSP – pseudo codice C

```

struct adjacency
{
    cell_name      cell_1, cell_2;
    hyperplane    h;
}

struct adjgraph
{
    list<adjacency> adj_list;
}

```

Figura 4.15: Struttura dati SBSP: grafo d'adiacenza — pseudo codice C

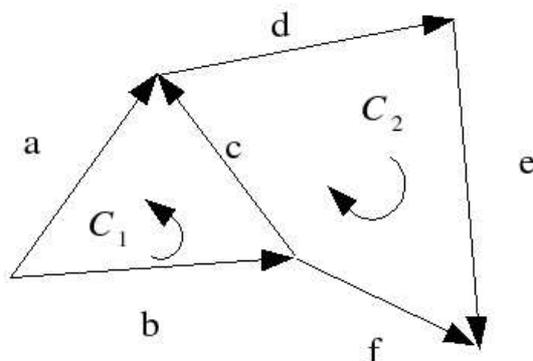


Figura 4.16: Cocatena da rappresentare

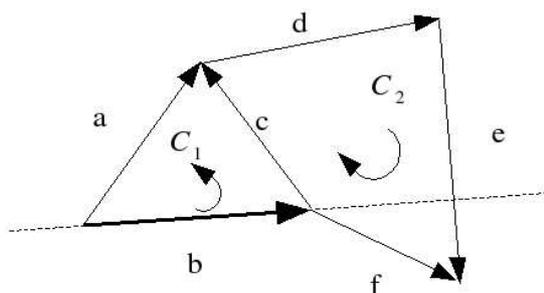


Figura 4.17: Primo passo dell'algoritmo di partizionamento

Vengono rappresentati nelle figure 4.16–4.20 una cocatena, seguita da una sua possibile rappresentazione mediante albero SBSP.

## 4.4 Cobordo ed SBSP

È stato chiarito come una cocatena risulti rappresentabile tramite la struttura dati SBSP. Tale struttura, come espresso in precedenza, memorizza i coefficienti di ogni cella della cocatena, associando ad essi le celle adiacenti — quelle di dimensione immediatamente superiore — ed il segno relativo.

È evidente come queste informazioni siano sufficienti per il calcolo del cobordo sulle cocatene. Una **visita dell'albero** quindi permette di calcolare in modo agevole il cobordo, mediante un semplicissimo algoritmo:

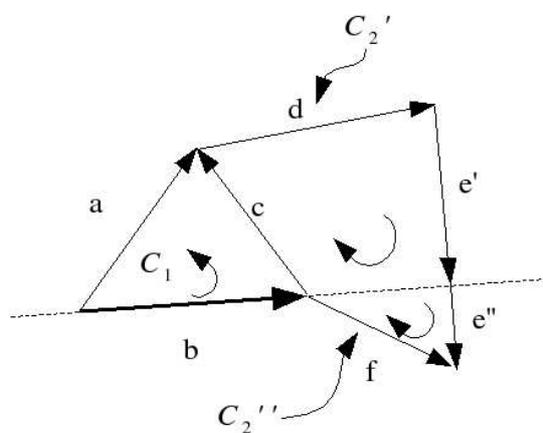


Figura 4.18: Partizionamento coerente

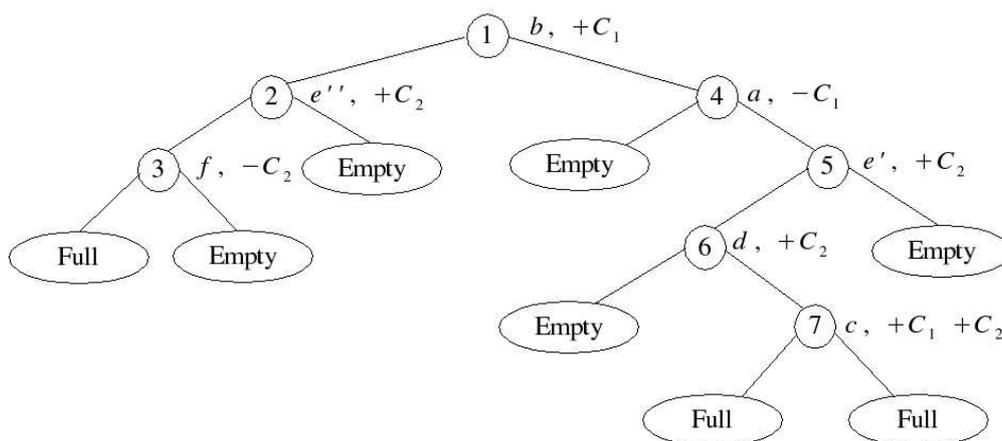


Figura 4.19: Possibile albero SBSP rappresentante la cocatena

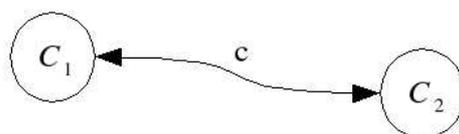


Figura 4.20: Grafo d'adiacenza delle celle

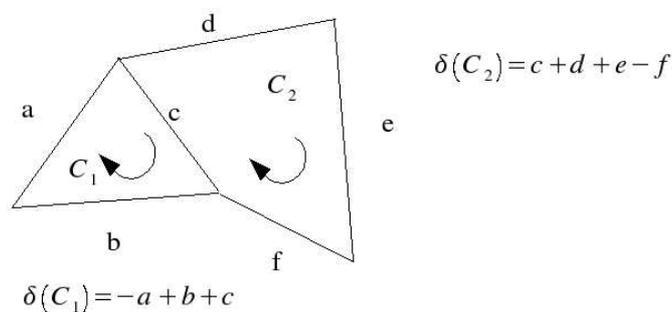


Figura 4.21: Cobordo della cocatena

1. Assegnare il valore iniziale nullo ai coefficienti di ogni cella di ordine superiore
2. Per ogni nodo  $\nu$  dell'albero, sommare il coefficiente  $g_\nu$  alla cella  $C_\nu$  adiacente, con segno  $sgn_{C_\nu}$ , ovvero  $sgn_{C_\nu} \cdot g_\nu$
3. Proseguire l'algoritmo sui sottoalberi  $above(\nu)$  e  $below(\nu)$

Le celle di ordine superiore cui associare il coefficiente risultante dal calcolo del cobordo, possono essere ricavate sia dal grafo d'adiacenza delle celle, sia dall'albero stesso, essendo presenti i nomi delle celle in ogni nodo dell'albero.

## 4.5 Teorema di Stokes ed SBSP

Riferendosi al teorema di Stokes, si ricordi che tale teorema sulle forme differenziali asserisce che l'integrale di una forma differenziale sul bordo di un complesso a celle è uguale all'integrale della derivata esterna della forma calcolata sul complesso stesso, ovvero

$$\int_{\partial R} \omega = \int_R d\omega$$

Nel capitolo precedente, è stato messo in evidenza come tale relazione

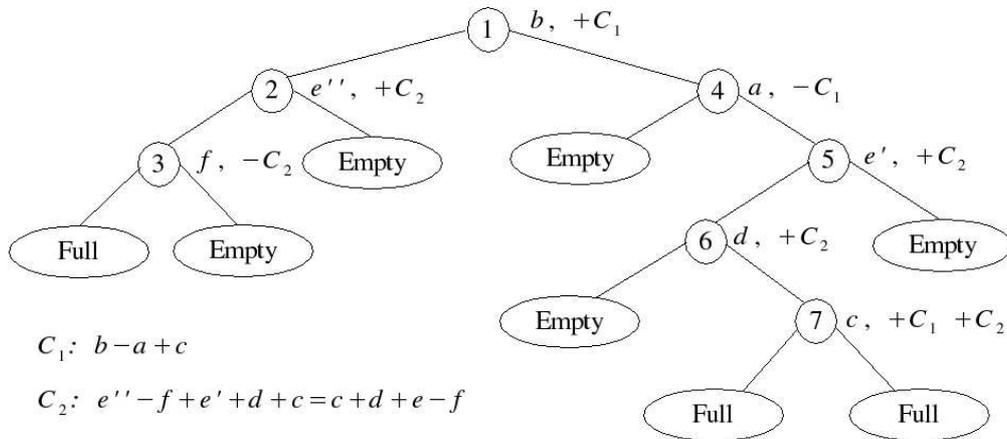


Figura 4.22: Cobordo calcolato sull'albero SBSP

possa essere letta in due modi differenti:

$$\int_{\partial R} \omega = \begin{cases} \text{k-cocatena} & \xrightarrow{\delta} & (k+1)\text{-cocatena} \\ \int \uparrow & & \\ \text{k-forma} & & \end{cases}$$

$$\int_R d\omega = \begin{cases} & & (k+1)\text{-cocatena} \\ & & \uparrow \int \\ \text{k-forma} & \xrightarrow{d} & (k+1)\text{-forma} \end{cases}$$

La struttura dati SBSP contiene le informazioni necessarie per applicare il teorema nel primo senso.

Un albero SBSP rappresenta una k-cocatena sul complesso  $\partial R$  in uno spazio  $E^{k+1}$ . Ogni nodo dell'albero contiene le informazioni riguardanti un iperpiano di supporto, ovvero le informazioni della k-cella di  $\partial R$ . Questa informazione consente di calcolare il primo passo del teorema, cioè

$$\text{k-forma} \xrightarrow{\int} \text{k-cocatena}$$

Tale operazione di integrale assegna ad ogni k-cella un coefficiente ricavato dall'integrazione della k-forma: crea una k-cocatena. Questa operazione può essere svolta ricavando la topologia delle k-celle dall'albero SBSP, integrando poi cella a cella.

Il passo successivo è quindi una visita dell'albero per calcolare il cobordo della cocatena, ovvero eseguire il secondo passo del teorema, dunque

$$\text{k-cocatena} \xrightarrow{\delta} (k+1)\text{-cocatena}$$

L'altra parte del teorema di Stokes, prevede la differenziazione esterna della forma differenziale ed una integrazione cella a cella.

Per quanto riguarda la derivata esterna, l'albero SBSP non è di aiuto, essendo la derivazione principalmente una operazione simbolica. Per l'integrazione, l'albero SBSP può essere utilizzato per ricavare la topologia delle  $(k + 1)$ -celle, avendo le informazioni necessarie, ovvero gli iperpiani di supporto delle  $k$ -celle.

## 4.6 SBSP ed ottimizzazioni

Dalla definizione di albero BSP appare evidente come in molte situazioni tale struttura risulti contenere informazioni ridondanti. Vi sono infatti casi in cui un iperpiano non apporti alcuna informazione aggiuntiva sulle celle convesse generate dalla partizione dello spazio.

Un iperpiano infatti se partiziona una cella che già è da considerare *full* o *empty*, può essere tranquillamente rimosso dall'albero senza modificare in alcun modo la partizione. In figura 4.23 viene messa in evidenza questa situazione. Si immagini che nella situazione in esempio, l'ultimo iperpiano ad essere preso in considerazione dall'algoritmo sia l'iperpiano di adiacenza tra le celle  $C_1$  e  $C_2$ . Una partizione dello spazio è ormai definita, ed una ulteriore divisione dello spazio non apporta alcuna informazione ulteriore. L'iperpiano può essere quindi tralasciato considerando l'unica cella  $C'$ .

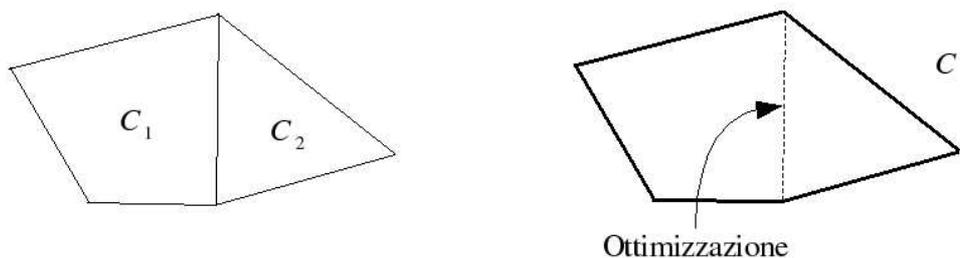


Figura 4.23: Eliminazione di un iperpiano in una partizione BSP

Questa operazione, che può ridurre sensibilmente la quantità di dati da memorizzare, è da **evitare assolutamente** su un albero SBSP. Una eliminazione di un iperpiano elimina informazioni fondamentali quali proprio la struttura delle cocatene da rappresentare, ottenendo cocatene del tutto diverse da quelle originarie.

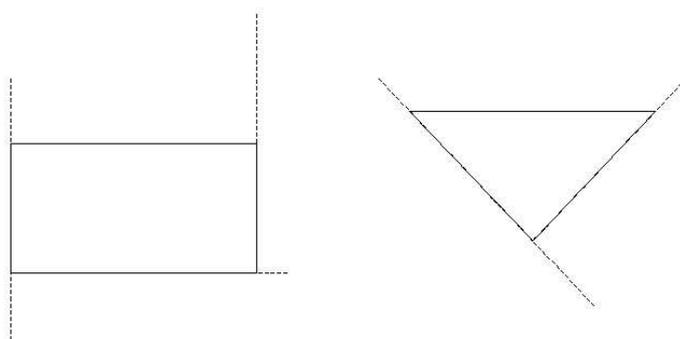


Figura 4.24: Due celle separate con relativi iperpiani di supporto

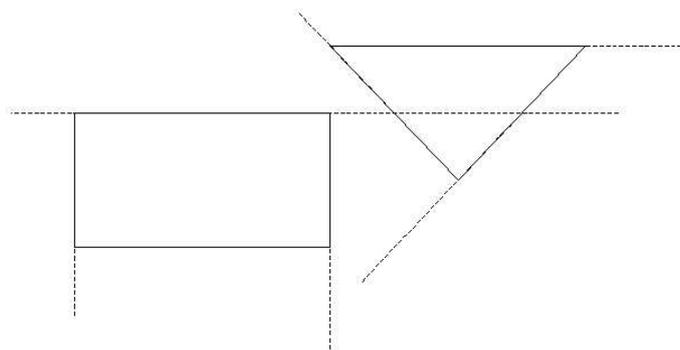


Figura 4.25: Fusione degli alberi BSP

## 4.7 Valutazioni finali

L'uso di alberi BSP porta indubbi vantaggi nella memorizzazione di cocatene. In primo luogo, la partizione binaria dello spazio è una tecnica consolidata, gli alberi BSP derivanti sono usati in molteplici campi. Ciò che si propone dunque è una piccola modifica allo standard BSP per poter accogliere i dati necessari al calcolo del cobordo ed alla ricostruzione topologica. Ciò consente anche di unire agevolmente le rappresentazioni di celle separate mediante una *fusione* degli alberi — vedi figure 4.24 e 4.25.

Come già evidenziato, gli alberi BSP si prestano ad operazioni booleane, nonchè alla operazione fondamentale di stabilire se un punto è interno od esterno alle celle.

Un notevole vantaggio dell'uso degli alberi SBSP è l'esigua quantità di da-

ti necessari alla memorizzazione delle informazioni. È stato in questo capitolo dimostrato che una  $k$ -cocatena è partizionabile con un iperpiano, e dunque è memorizzabile tramite un albero SBSP. Conseguenza di questa proprietà è l'equivalenza tra cocatene ed una loro decomposizione simpliciale. È dunque possibile utilizzare una struttura dati simpliciale, come la *Winged Triangle*, per memorizzare una  $k$ -cocatena, calcolarne il cobordo e valutare l'integrale di una forma differenziale. Ciò che risulta evidente è che in una situazione complessa, la mole di dati di una decomposizione simpliciale è maggiore che in una rappresentazione mediante partizione binaria dello spazio.

Uno svantaggio, chiaramente derivante dalla rappresentazione BSP, è la impossibilità di memorizzare  $k$ -cocatene in uno spazio di dimensione superiore a  $k + 1$ .

La versatilità della struttura dati rispetto ad operazioni, la sua esigua dimensione, fa sì che possa essere d'aiuto nella costruzione di strumenti di calcolo.

# Appendice

In questo capitolo, si fornisce qualche esempio di utilizzo dell'albero SBSP applicato al calcolo del cobordo ed al teorema di Stokes.

## Calcolo del cobordo in 2D

Si calcola il cobordo della 1-cocatenata in figura 5.1, rappresentata tramite un albero SBSP.

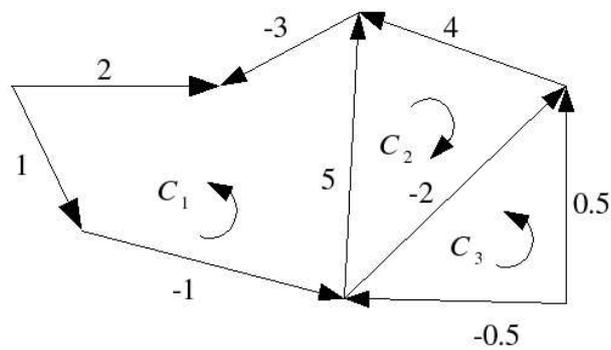


Figura 4.26: Cocatenata originaria

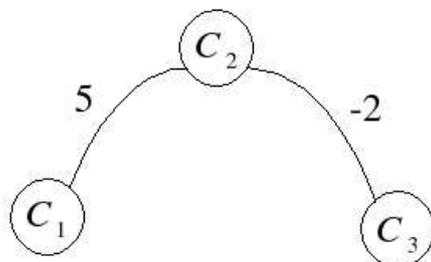


Figura 4.27: Grafo d'adiaceza tra celle

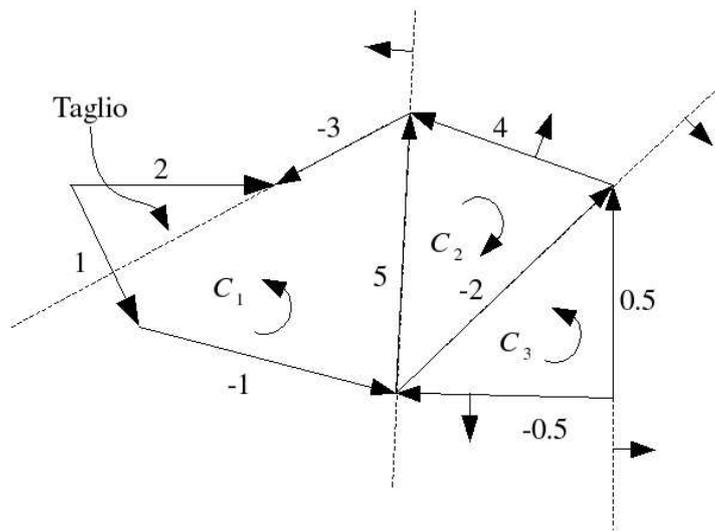


Figura 4.28: Taglio delle celle

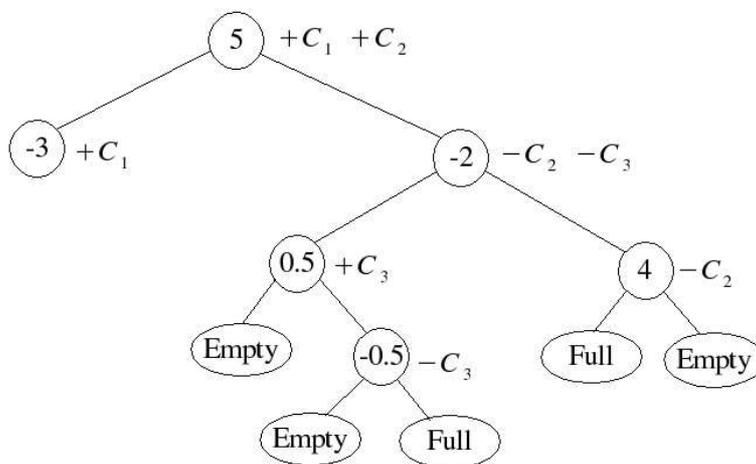


Figura 4.29: Albero SBSP prima del taglio

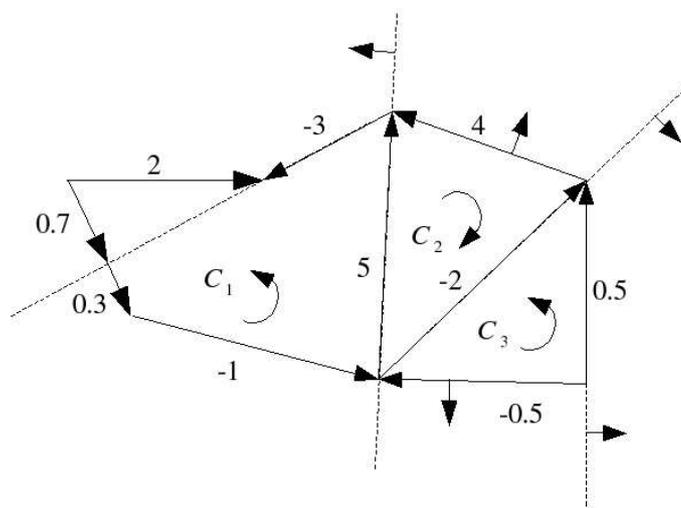


Figura 4.30: Scelta dei coefficienti: si è scelto di usare i coefficienti  $\frac{3}{10}$  e  $\frac{7}{10}$

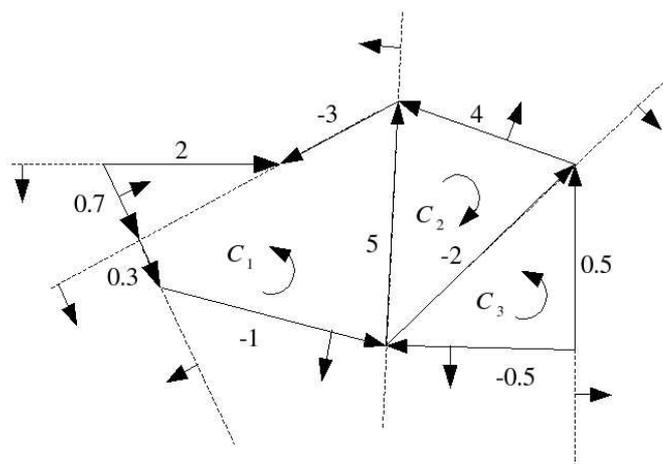


Figura 4.31: Partizione completa della cocatena

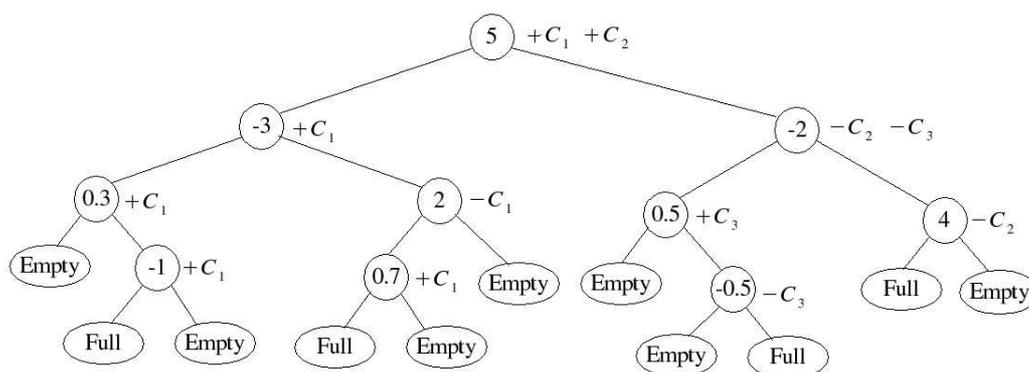


Figura 4.32: Albero SBSP completo

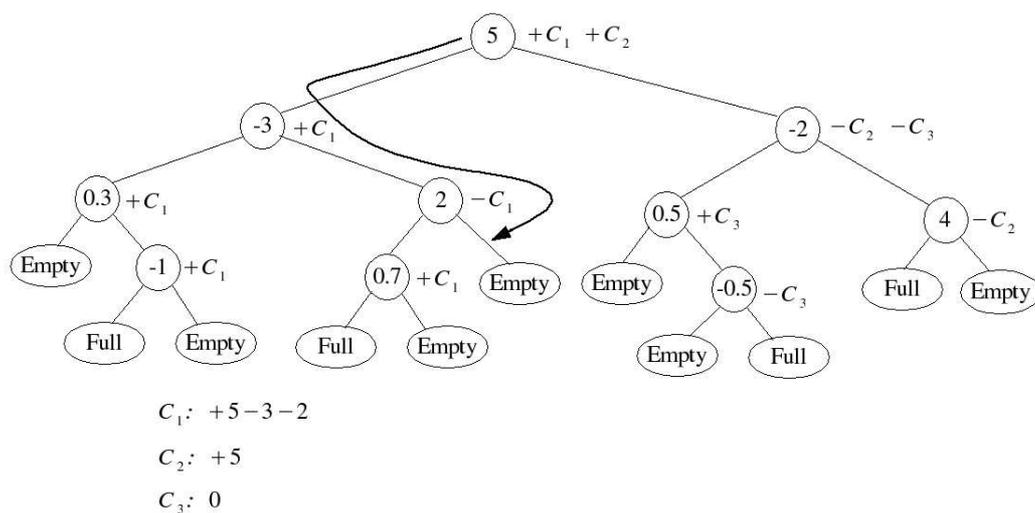


Figura 4.33: Calcolo del cobordo: visita dell'albero — 1

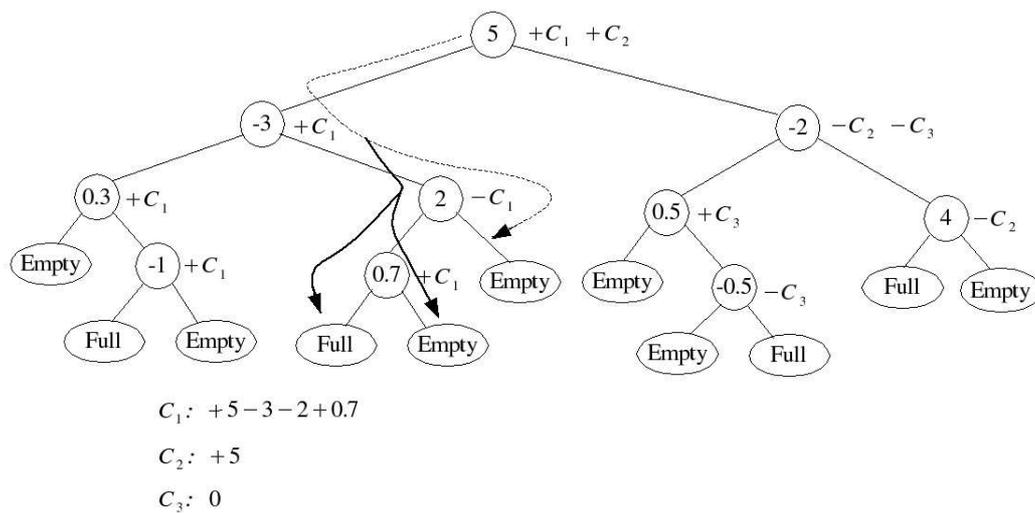


Figura 4.34: Calcolo del cobordo: visita dell'albero — 2

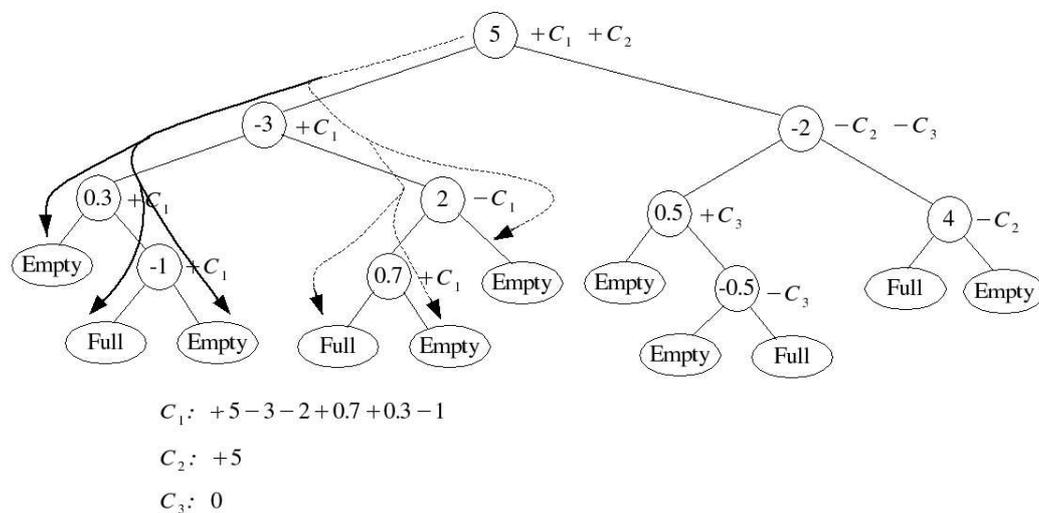


Figura 4.35: Calcolo del cobordo: visita dell'albero — 3

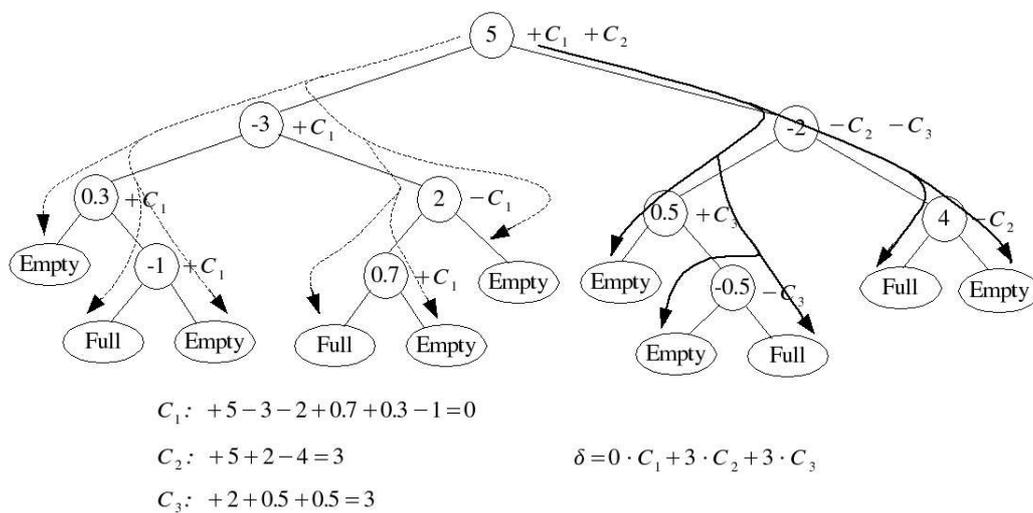


Figura 4.36: Calcolo del cobordo completato

## Partizione coerente in 3D

Si fornisce un esempio della proprietà di invarianza del cobordo rispetto alla partizione coerente. L'esempio riguarda una 2-cocatena immersa, per i motivi già spiegati nei capitoli precedenti, in uno spazio tridimensionale.

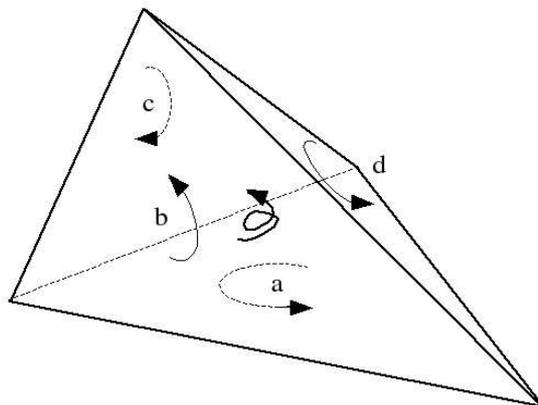


Figura 4.37: Cocatena originaria

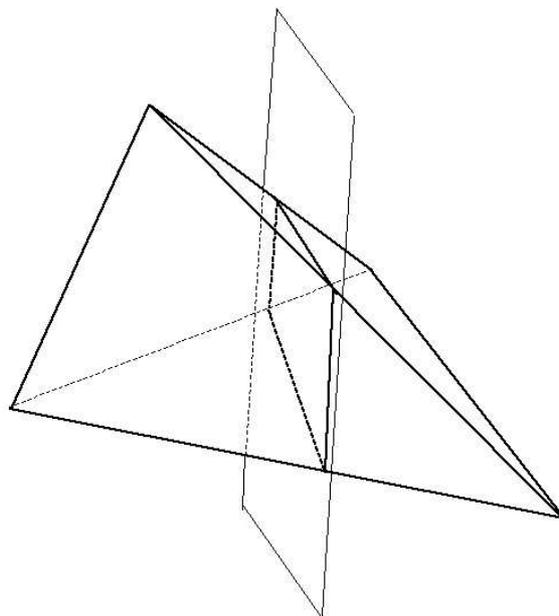
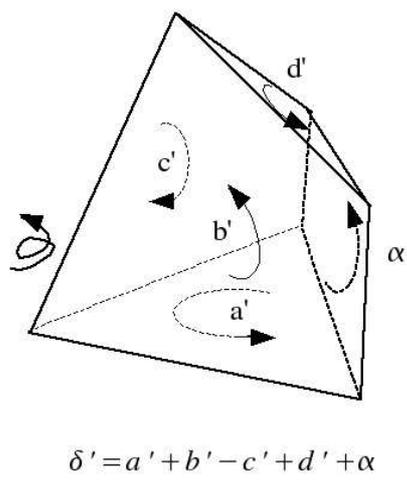


Figura 4.38: Iperpiano di partizionamento



$$\delta' = a' + b' - c' + d' + \alpha$$

Figura 4.39: Prima cella generata dalla partizione coerente e cobordo della stessa

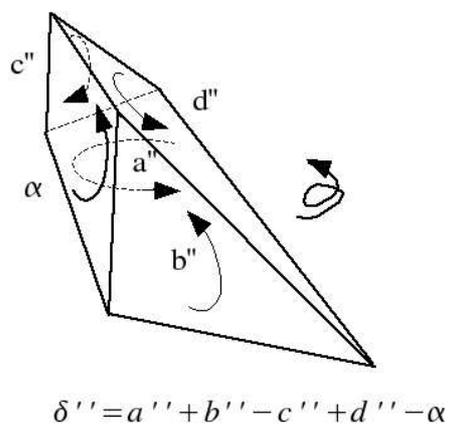


Figura 4.40: Seconda cella generata e relativo cobordo

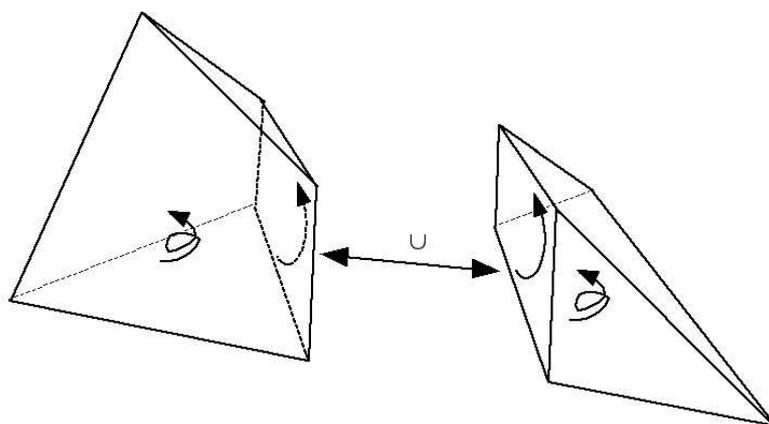


Figura 4.41: Unione coerente delle due celle

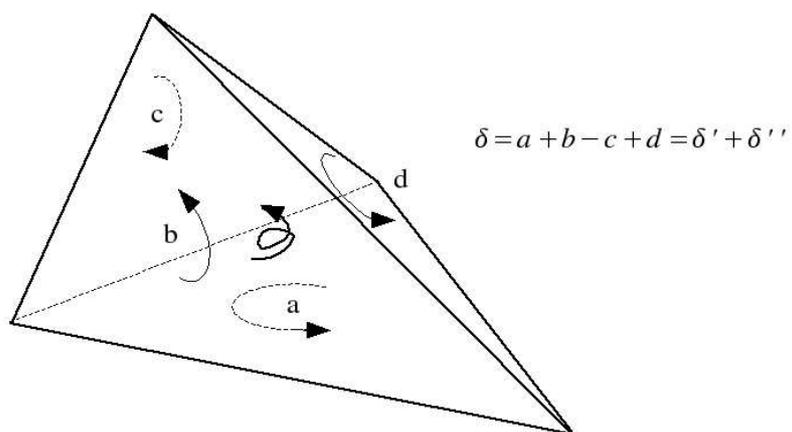


Figura 4.42: Cobordo della cella originale e confronto con la partizione

# Indice analitico

- adiacenza, 12
- albero BSP, 18
- albero SBSP, 74
- alternatore, 33
- applicazione lineare, 27
  
- bordo, 8
  
- campo scalare, 43
- campo vettoriale, 43
- cella, 16
- cobordo, 49
- cocatena, 49
- cocatene simpliciali, 70
- combinazione convessa, 8
- complesso a celle, 16
- complesso poliedrale, 14
- complesso simpliciale, 13
- convesso, 8
- covettore, 28
  
- derivata esterna, 52
- derivazione per cella, 60
- direzioni, 44
- diseguaglianza valida, 10
- duale del teorema di Stokes, 60
  
- faccia, 10
- faccia indotta, 12
- forma alternante, 33
- forma bilineare, 33
- forma differenziale lineare, 44
- forma differenziale quadratica, 45
- forma esterna, 32
- forma lineare, 28
  
- forma multilineare, 33
- fusione alberi BSP, 81
  
- immagine, 27
- intensità, 44
- interno, 8
- intorno, 8
- invarianza del cobordo, 67
- iperpiano, 8
- iperpiano di supporto, 9, 10
  
- k-direzione, 35
- k-forma differenziale, 46
- k-vettore, 34
  
- multivettore, 34
  
- nucleo, 27
  
- ottimizzazione, 80
  
- palla, 16
- partizione coerente, 66
- poliedro, 9
- politopo, 11
- prodotto esterno, 34
- prodotto tensore, 33
  
- scalare, 26
- scheletro, 12
- sfera, 15
- simmetrizzatore, 34
- simpletso, 9
- sottospazio above, 8
- sottospazio below, 8
- spazio affine, 26

spazio duale, 28  
spazio euclideo, 7  
spazio topologico, 7  
spazio vettoriale, 25  
starplex, 51  
struttura affine, 26  
supporto, 13

teorema di Stokes, 58  
teorema di Tonti, 57  
topologia, 7  
topologia metrica, 7  
topologia naturale, 7  
triangolazione, 15

unione coerente, 66

vettore, 26

# Riferimenti

- [Ada72] J. F. Adams. *Algebraic topology: a student's guide*. Cambridge University Press, 1972.
- [Ava91] Antonio Avantaggiati. *Istituzioni di matematica*. Casa Editrice Ambrosiana, 1991.
- [Bra66] F. H. Branin. The algebraic-topological basis for network analogies and the vector calculus. In *Proceeding of the Symposium on Generalized Networks*, volume 16:453–491. Polytechnic Institute of Brooklyn, 1966.
- [Bro83] A. Brøndsted. An introduction to convex polytopes. Graduate texts in mathematics, Vol. 90 — Springer-Verlag, New York, NY, 1983.
- [Bro01] John Browne. Grassmann algebra (draft). Swinburne University of Technology (Melbourne), 2001.
- [Car02a] Antonio Di Carlo. Costrutti matematici della fisica del continuo. Ciclo di lezioni per il Dottorato di Ricerca in Scienze dell'Ingegneria Civile, Università Roma Tre — dagli appunti dell'autore di questa tesi, 2002.
- [Car02b] Antonio Di Carlo. Il cobordo è indipendente dalla partizione del dominio. Comunicazione privata, 2002.
- [Cli78] W. K. Clifford. Applications of Grassmann's extensive algebra. *American Journal of Mathematics Pure and Applied*, 1:350–358, 1878.
- [Cro67] Micheal Crowe. *A history of vector analysis*. Notre Dame, 1967.
- [Dar94] R. W. R. Darling. *Differential forms and connections*. Cambridge University Press, 1994.

- [dC71] Manfredo Perdigão do Carmo. *Differential forms and applications*. Springer-Verlag, 1971. English translation (1994).
- [For41] Henry George Forder. *The theory of extension*. 1941.
- [Gra44] Hermann Günter Grassmann. *Die Lineale Ausdehnungslehre*. Leipzig, 1844.
- [Gra62] Hermann Günter Grassmann. *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form*. Leipzig, 1862.
- [Gra78] Hermann Günter Grassmann. Verwendung der ausdehnungslehre für die allgemeine theorie der polaren und den zusammenhang algebraischer gebilde. *Crelle's Journal*, 84:273–283, 1878.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Hes93] D. Hestens. Differential forms in geometric calculus. In F. Brackx, et al., editor, *Clifford algebras and their applications in mathematical physics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [Hes96] D. Hestens. Grassmann's vision. In G. Schubring, editor, *Hermann Günter Grassmann (1809–1877): Visionary mathematician, scientist and neohumanist scholar*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [Hyd06] Edward Wyllys Hyde. *Grassmann's space analysis*. 1906.
- [Jan96] B. Jancewicz. The extended Grassmann algebra of  $\mathbb{R}^3$ . In W. E. Baylis, editor, *Clifford (geometric) algebras with application to physics, mathematics and engineering*. Birkhäuser, Boston (Basel/Berlin), 1996.
- [Kan95] Lloyd C. Kannenberg. *A new branch of mathematics: the Ausdehnungslehre of 1844 and Other Works*. Open Court, 1995.
- [Mun84] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison Wesley Publishing Company, 1984.
- [Pao02] Alberto Paoluzzi. *Geometric programming for computer aided design*. John Wiley & Sons, 2002.
- [RC74] F. John R. Courant. *Introduction to calculus and analysis*. Wiley, 1974.

- [Req77] A. A. G. Requicha. Mathematical models of rigid solid models. Production automation project, University of Rochester, 1977.
- [Req80] A. A. G. Requicha. Representations for rigid solids: Theory, methods and systems. *ACM Computer Surveys*, 12(4),437–464, 1980.
- [Rot97] Rita Procesi, Rosaria Rota. *Lezioni di geometria e algebra*. Accademica, 1997.
- [Sha00] Jeffrey A. Chard, Vadim Shapiro. A multivector data structure for differential forms and equations. *IMACS Transactions Journal, Mathematics and Computer in Simulation*, 54(1):33–64, 2000.
- [Ste00] R. Egli, N. F. Stewart. A framework for system specification using chains on cell complexes. *Computer Aided Design*, 32(9):447–459, 2000.
- [Thi90] B. F. Taylor, J. Amantides, W. Thibault. Merging bsp trees yields polyhedral set operations. In *Computer Graphics*, volume 24(4):115–124. ACM Siggraph '90, 1990.
- [Tho02] Len Evens, Rob Thompson. *Algebraic topology*. Northwestern University of New York, 2002.
- [Ton75] Enzo Tonti. On the formal structure of physical theories. Technical report, Istituto di Matematica del Politecnico di Milano, 1975.
- [Ton00] Enzo Tonti. Finite formulation of the electromagnetic field. *Geometric methods for computational electromagnetics*, 2000.
- [Tu82] R. Bott, L. Tu. *Differential forms in algebraic topology*. Springer-Verlag (GTM 82), 1982.
- [Whi98] Alfred North Whitehead. *A treatise on universal algebra*. 1898.
- [Whi57] H. Whitney. *Geometric integration theory*. Princeton University Press, 1957.